Introduction à la géométrie algébrique, août 2011

Documents autorisés.

Exercice 1. Pour tout anneau commutatif A, soient ν_A l'unique morphisme d'anneau $\mathbb{Z} \to A$ et $c(A)$ l'unique entier positif tel que $\mathrm{Ker}(\nu_A) = c(A)\mathbb{Z}$. Soient A et B des anneaux commutatifs.

1. On suppose que A est un sous-anneau de B. Montrer que $c(A) = c(B)$.
2. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneau. Montrer que $c(B)$ divise $c(A)$.
3. Montrer que si $A \simeq B$ alors $c(A) = c(B)$.
4. Montrer que $c(A \times B) = \mathrm{ppcm}(c(A), c(B))$.
5. Soient p un nombre premier, $n \geq 1$, et (p, X^n) l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par p et X^n.
   (a) Montrer que $(p, X^n) \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
   (b) Déterminer $c(\mathbb{Z}[X]/(p, X^n))$.
6. Déterminer $c(\mathbb{Z}[X]/(2, X^3)(3, X^2))$.

Exercice 2. Pour tout anneau commutatif A on note $\mathcal{I}(A)$ l'ensemble des idéaux de A et $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Soient A et B des anneaux commutatifs.

1. Soient $I \in \mathcal{I}(A)$ et $J \in \mathcal{I}(B)$. Montrer que $I \times J \in \mathcal{I}(A \times B)$ et que $A \times B \,/\, I \times J \simeq A/I \times B/J$.
2. Soit $I \in \mathcal{I}(A \times B)$. Soient les morphismes $p_A : A \times B \to A$, $(a, b) \mapsto a$ et $p_B : A \times B \to B$, $(a, b) \mapsto b$. Montrer que $I = p_A(I) \times p_B(I)$.

Soit l'application $\phi : \mathcal{I}(A) \times \mathcal{I}(B) \to \mathcal{I}(A \times B)$, $(I, J) \mapsto I \times J$.

3. Montrer que ϕ est bijective.
4. Montrer que $\phi^{-1}(\mathcal{P}(A \times B)) = \mathcal{P}(A) \times \{B\} \,\cup\, \{A\} \times \mathcal{P}(B)$.
5. Soit p un nombre premier. Déterminer $\mathcal{I}(\mathbb{Q}[X]/(X^p - 1))$ et $\mathcal{P}(\mathbb{Q}[X]/(X^p - 1))$.

Exercice 3.

1. Montrer que $X^5 + Y^5 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.
2. Montrer que l'application $\mathbb{Q}[X, Y] \to \mathbb{Q}[X, Y]$, $P(X, Y) \mapsto P(X - Y, X + Y)$ est un automorphisme d'anneau.
3. Montrer que $X^5 + 10X^3Y^2 + 5XY^4 - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.