Algèbre linéaire et géométrie I
Janvier 2018

Documents interdits.

Exercice 1. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}.$$

Soit l'application $\sigma : V \times W \to \mathbb{R}^3$, $(v,w) \mapsto v + w$.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $V \cap W = \langle u \rangle$.
2. Montrer que $V + W = \mathbb{R}^3$.
3. L'application σ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \langle (1,1,1) \rangle.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
2. Soit p la projection sur V parallèlement à W. Calculer $p(x,y,z)$.
3. Déterminer les ensembles

   $$A = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid p(u) = (1,1,1)\} \quad \text{et} \quad B = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid p(u) = (1,0,1)\}.$$

   Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$, et $p : E \to E$ la projection sur V parallèlement à W. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto p(-u) + 2u\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soient $v \in V$ et $w \in W$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
3. Montrer que $V \subseteq \mathrm{Im}(f)$ et $W \subseteq \mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que f est bijective.