Algèbre linéaire et géométrie I
Janvier 2019

Documents interdits.

Exercice 1. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \langle (1, 1, 0) \rangle.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
2. Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur V parallèlement à W. Calculer $p(1, 1, 1)$.
3. Déterminer $A = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid p(u) = (2, 2, 1)\}$ et $B = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid p(v) \in \langle (2, 2, 1) \rangle\}$. Les ensembles A et B sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - z, x - y + z). \end{aligned}$$

Soient $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $V = \langle u_1, u_2 \rangle$.
4. L'application $g : V \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto f(v)$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus V$. Soit $p : E \to E$ la projection sur V parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = f(V)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f \circ p) = \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ p) = \mathrm{Ker}(f)$.