Algèbre linéaire et géométrie I
Mars 2017

Documents interdits.

Exercice 1. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y, t)$. Soient $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}$.

1. Déterminer $\dim \mathrm{Im}(f)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f)$.
2. Déterminer $\dim V \cap W$.
3. Montrer que $(V \cap W) + \mathrm{Ker}(f) = V$.
4. Soit $U = V \cap W \cap \mathrm{Ker}(f)$. Pour quels entiers $n \geq 1$ existe-t-il une bijection linéaire $U \times \mathbb{R}^n \to V$?

Exercice 2.

1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire de K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $v_1, \ldots, v_r \in E$ et $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$. Montrer que $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\dim V = r$ et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus V$.

Soit l'application linéaire $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \mapsto (0, 0, x + z, y + t)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ soient $u_a = (1-a, 0, a, a)$, $v_a = (1, 1, a-1, 0)$, et $V_a = \langle u_a, v_a \rangle$.

2. Montrer que p est une projection en précisant la somme directe associée.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(p) \oplus V_a$.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g : E \to E$ des applications linéaires. Soient $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus V$ et $h : V \to E$, $v \mapsto g(f(v))$, la restriction de $g \circ f$ à V.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(h) = \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.