Algèbre linéaire et géométrie I
Mars 2018

Documents interdits.

**Exercice 1.** Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x - t\,, y - t\,, z - t)$. Soient $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ et $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0\}$.

1. Montrer que $f$ est surjective et déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $V = \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $f(V)$.
4. Pour quels plans $P$ de $\mathbb{R}^3$ existe-t-il une bijection linéaire $\mathrm{Ker}(f) \to P \cap f(V)$ ?

**Exercice 2.** Soient $E, F$ des $K$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$, $g : F \to E$ des applications linéaires.

1. Montrer que si $g \circ f$ est bijective alors $\dim E \leq \dim F$.
2. Montrer que si $g$ est surjective et $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = F$ alors $g \circ f$ est bijective.

Soient les applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y\,, 2x\,, x - y)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y - z\,, x - y - z)$.

3. Montrer que $g$ est surjective et que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathbb{R}^3$.
4. Soit $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Quels sont les $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\langle g(f(u)), g(f(v)) \rangle = \mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 3.** Soient $E, F$ des $K$-espaces vectoriels de dimension finie et $f, g : E \to F$ des applications linéaires telles que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$. Soit $V = \{u \in E \mid f(u) = g(u)\}$.

1. Montrer que $V$ est le noyau d'une application linéaire $E \to F$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(g)$ et $\dim \mathrm{Im}(g) = \dim \mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f - g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $\dim V = \dim \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$.