Algèbre linéaire et géométrie I
Mars 2019

Documents interdits.

Exercice 1. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x-z\,, y-t\,, x-y-z+t)$. Soient $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = V$.
3. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f) + W)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap W)$.
4. Montrer que $f(W) = V$.

Exercice 2. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur V parallèlement à W.

2. Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que (u_1, u_2) est libre. Montrer que $(p(u_1), p(u_2))$ est libre si et seulement si $\langle u_1, u_2 \rangle \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $(\,p(1, 1, 2)\,, p(a, -1, 0))$ est une base de V.
4. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\langle\, p(1, 1, 2)\,, p(a, -1, 0)\,, (2, 1, a)\rangle = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. Soient V un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus V$ et $p : E \to E$ la projection sur $\mathrm{Ker}(f)$ parallèlement à V.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
2. Montrer que $(f + p)(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(f)$ et $(f + p)(V) = \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $f + p$ est bijective si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.