Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2018, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $C = (g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_C(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f \circ f - \mathrm{Id})$.
3. Quels sont les plans P de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim(f - \mathrm{Id})(P) = \dim g(P)$? Quels sont ceux tels que $\dim(f \circ f - \mathrm{Id})(P) = \dim g(P)$?

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(f \circ g) = \dim \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.

Soient $f, g_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ sont

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_B(g_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\dim \mathrm{Im}(g_a \circ f) = \dim \mathrm{Im}(f)$.
4. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\dim \mathrm{Im}(f \circ g_a) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$ et $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à W. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{End}_K(E) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(E) \\ f &\longmapsto f - f \circ p\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(\pi) = \{g \in \mathrm{End}_K(E) \mid V \subseteq \mathrm{Ker}(g)\}$.
2. Montrer que l'application linéaire $\mathrm{Im}(\pi) \to \mathrm{Hom}_K(W, E)$, $g \mapsto g_{|W}$ est bijective.
3. Soit $F = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid f \circ p = f\}$. Déterminer $\dim F$ en fonction de $\dim E$ et $\dim V$.