Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2017, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1,-2,1)$, $v_2 = (2,0,-1)$ et $v_3 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_C(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f \circ f) \oplus \mathrm{Im}(f \circ f)$?

Exercice 2.

1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, U, V des sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Montrer que $f(U) = f(V)$ si et seulement si $U + \mathrm{Ker}(f) = V + \mathrm{Ker}(f)$.

Soient $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $U_a = \langle (1,0,1), (a,1,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$. Soient la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la dimension de $V + \mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(V) = f(U_a)$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient $g \in \mathrm{End}_K(E)$ et $k = \dim \mathrm{Ker}(g)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \gamma : \mathrm{End}_K(E) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(E) \\ f &\longmapsto g \circ f\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que γ est bijective si et seulement si g est bijective.
2. Soit B une base de E dont les k premiers termes forment une base de $\mathrm{Ker}(g)$. Montrer que $f \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ si et seulement si les $n-k$ dernières lignes de $M_B(f)$ sont nulles.
3. Montrer que $F = \{h \in \mathrm{End}_K(E) \mid \exists\, f \in \mathrm{End}_K(E) \text{ tel que } h = g \circ f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_K(E)$ et déterminer sa dimension en fonction de n et de k.