Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2018, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, -1, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\langle v_1, v_2 \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
3. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que $(v_1, v_2, f(v_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $f(v_3) \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.
4. Soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est
$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $(v_1, v_2, f_a(v_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $V = \langle e_1 - e_2\, , -e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de V, de $V \cap \mathrm{Ker}(f)$ et de $V \cap \mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $f(V)$ et une base de $f^{-1}(V)$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = f(V) \oplus f^{-1}(V)$?

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$.
3. Donner un exemple de $f \in \mathrm{End}_K(E)$ ni nul ni bijectif tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
4. Donner un exemple de $f \in \mathrm{End}_K(E)$ où E n'est pas somme directe de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.