Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2019, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (2,2,-1)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Soient $V = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) \in \langle v_2 + 3v_3 \rangle\}$ et $W = \langle v_1 + v_2 \,,\, v_3 \rangle$.

1. Montrer que $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_C(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.
3. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $V = \langle v_1 \,,\, v_2 + v_3 \rangle$.
4. Déterminer $\dim(V + f(W))$ et une base de $V \cap f(W)$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit l'application linéaire $\varphi : \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$, $g \mapsto f \circ g$.

1. Montrer que $C = (2e_1 - e_2 \,,\, e_1 + 2e_2)$ est une base de E et déterminer $M_C(f)$.
2. Soit $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$. Montrer que $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ ssi la dernière ligne de $M_C(g)$ est nulle.
3. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\dim \mathrm{Im}(\varphi)$.
4. Montrer que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $g, h \in \mathrm{End}_K(E)$. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus V$.

1. Montrer que l'application linéaire $\gamma : V \to \mathrm{Im}(g)$, $v \mapsto g(v)$ est bijective.
2. Montrer que si $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Im}(g)$, alors l'endomorphisme $f : E \to E$, $u \mapsto \gamma^{-1}(h(u))$ est bien défini et satisfait $g \circ f = h$.
3. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $h = g \circ f$ ssi $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. A-t-on unicité ?