Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2017, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y,\ x+y,\ y+z). \end{aligned}$$

Soient $v_0 = (1,-1,1)$, $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$, et $C = (v_0, v_1, v_2)$.

1. Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $M_B(f)$ et $M_C(f)$.

Soit p la projection sur $\langle v_0, v_1 \rangle$ parallèlement à $\langle v_2 \rangle$.

3. Montrer que $f \circ p = p \circ f$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f-p) \oplus \mathrm{Im}(p \circ f \circ p)$.

Exercice 2.

1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_a) \oplus \mathrm{Im}(f_a)$.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_a - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Im}(f_a - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $U, V, W \subseteq E$ des sous-espaces tels que $E = U \oplus V = U \oplus W$. Soient p la projection sur V parallèlement à U, et q la projection sur W parallèlement à U.

1. Montrer que l'application $\varphi : W \to V$, $w \mapsto p(w)$ est bijective.
2. Montrer que $\varphi^{-1}(v) = q(v)$ pour tout $v \in V$.
3. Montrer que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.