Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2018, section physique

Documents autorisés.

**Exercice 1.** Soit la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (3x-4y+2z,\ 2x-3y+z,\ z). \end{aligned}$$

Soient $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (1,1,0)$, et $C = (v_1, v_2, v_3)$.

1. Montrer que $C$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $M_B(f)$ et $M_C(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f \circ f - \mathrm{Id})$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f \circ f - \mathrm{Id})$.

**Exercice 2.** Soit la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Soient $f, g_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base $B$ sont

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_B(g_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $g_a$ est bijective.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g_a) = \mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\dim \mathrm{Im}(f \circ g_a) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 3.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f : E \to E$ une application linéaire telle que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et $p : E \to E$ la projection sur $\mathrm{Ker}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$.

1. Montrer que $p + f$ est bijective.
2. Montrer que $(p+f) \circ (p+f)$ est une combinaison linéaire de $p$ et de $f \circ f$.
3. L'application $p + f \circ f$ est-elle bijective ?