Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2019, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit la base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4) = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ de $\mathbb{R}^4$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) &\longmapsto (x,\, 0,\, x,\, x-y-z+t). \end{aligned}$$

Soient $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_2 + e_4$, $v_3 = e_3 + e_4$, $v_4 = e_4$, et $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z-t=0\}$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ et que $(v_1 + v_4, v_2, v_3)$ est une base de V.
2. Soit $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Déterminer $M_B(f)$ et $M_C(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
4. Déterminer $\dim f(V)$ et $\dim (f-\mathrm{Id})(V)$. A-t-on $V = f(V) \oplus (f - \mathrm{Id})(V)$?

Exercice 2. Soit la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Soient $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base B sont

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g))$. A-t-on $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$?

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g : E \to E$ des applications linéaires.

1. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f) \leq \dim \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\dim \mathrm{Im}(f) \geq \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(g \circ f)$ ssi $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$.
3. Si $\dim E = 3$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(g) = 2$, a-t-on $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$?