

Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2017, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 et $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (2, 0, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer $M_C(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f \circ f) \oplus \text{Im}(f \circ f)$?

Exercice 2.

1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, U, V des sous-espaces vectoriels de E et $f \in \text{End}_K(E)$. Montrer que $f(U) = f(V)$ si et seulement si $U + \text{Ker}(f) = V + \text{Ker}(f)$.

Soient $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $U_a = \langle (1, 0, 1), (a, 1, 0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$. Soient la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 et $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la dimension de $V + \text{Ker}(f)$.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\langle (1, 0, 1), (a, 1, 0), (1, 1, -1) \rangle = \mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(V) = f(U_a)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ entier. Soient $\alpha, \beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des applications linéaires non nulles telles que $\text{Ker}(\alpha) \neq \text{Ker}(\beta)$. Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \longmapsto (\alpha(u), \beta(u)).$$

1. Montrer que f est linéaire et que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\alpha) \cap \text{Ker}(\beta)$.
2. Déterminer $\dim \text{Ker}(\alpha)$ et montrer que $\text{Ker}(\alpha) + \text{Ker}(\beta) = \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que f est surjective.