Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2019, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - z,\ x + y - z)$. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit le sous-espace vectoriel $V_a = \langle (1, 0, 1), (2, a, 2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $\dim \operatorname{Ker}(f)$ et $\dim \operatorname{Im}(f)$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
2. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que V_a est une droite et ceux tels que V_a est un plan.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(V_a)$ est une droite et ceux tels que $f(V_a)$ est un plan.

Exercice 2. Soit $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (2, 2, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, et $v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Soient les sous-espaces vectoriels $V = \langle v_1\ ,\ v_2 + v_3 \rangle$ et $W = \langle v_1 + v_2\ ,\ v_3 \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_C(f)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et montrer que $\operatorname{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.
3. Déterminer $\dim V$ et montrer que $f(W) = \operatorname{Im}(f)$.
4. Déterminer $\dim(V + f(W))$ et une base de $V \cap f(W)$.

Exercice 3. Soit $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base $B = ((1, 0), (0, 1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$, une base de $\operatorname{Im}(f)$, et montrer que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
2. Soit C une base de $\mathbb{R}^2$ constituée d'une base de $\operatorname{Ker}(f)$ suivie d'une base de $\operatorname{Im}(f)$. Déterminer $M_C(f)$.
3. Montrer qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ non nul tel que af est une projection ; spécifier la somme directe associée à cette projection.