December 3, 2019

ALGÈBRE LINÉAIRE - EXERCICES 1

Contents

1. Sous-espaces vectoriels

Exercice 1.1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} \qquad V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$
$$V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \qquad V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$
$$V_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} \qquad V_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}.$$

Exercice 1.2. Soient

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{(a, a+b, b)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $V = W$.

Exercice 1.3. Soient E un K-espace vectoriel et $v \in E$.

1. Montrer que $K.v = \{a.v\ ;\ a \in K\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $K.v = \{0_E\}$ si et seulement si $v = 0_E$.

Exercice 1.4. Soient E un K-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_n \in E$. Soit

$$V = \{ \sum_{1 \leq i \leq n} a_i.v_i\ ;\ \forall\ 1 \leq i \leq n,\ a_i \in K\}$$

l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $v_i \in V$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
3. Montrer que $V = \{0_E\}$ si et seulement si $v_i = 0_E$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 1.5. Soient K un corps, $n \geq 1$ un entier, et $a_1, \ldots, a_n \in K$. Soit

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i = 0\ \}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de K^n.
2. Montrer que $V = K^n$ si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 1.6. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $E \times F = \{(u,v)\,;\, u \in E,\ v \in F\}$ leur produit. On définit une addition et une multiplication scalaire sur $E \times F$ en posant, pour tous $u, u' \in E$, $v, v' \in F$, et $a \in K$:

$$(u,v) + (u',v') \underset{\text{def}}{=} (u+u', v+v') \quad \text{et} \quad a.(u,v) \underset{\text{def}}{=} (a.u, a.v)\,.$$

1. Vérifier que $E \times F$ muni de ces deux opérations est un K-espace vectoriel. Quel est son élément neutre ?
2. Soient V un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $V \times W$ est sous-espace vectoriel de $E \times F$.

Exercice 1.7. Soient E un K-espace vectoriel et V un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $E \setminus V = \{u \in E \mid u \notin V\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1.8. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que l'intersection $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. La réunion $V \cup W$ est-elle un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1.9. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. On définit le sous-ensemble de E

$$V + W \underset{\text{def}}{=} \{v + w\,;\, v \in V,\ w \in W\}.$$

1. Montrer que $V \cup W \subseteq V + W$.
2. Montrer que $V + W$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1.10. Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, et $e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Soient

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}.$$

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $V \cap W = \mathbb{R}.(e_1 - e_2 + e_3)$.
3. Montrer que $V + W$ contient e_1, e_2 et e_3. (Noter que $e_1 + e_3 \in V$ et $e_1 - e_3 \in W$.)
4. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3.
5. Montrer que $V + W = \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.11. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.

1. Montrer que $\mathbb{R}.(1,1) \cap \mathbb{R}.(a,b) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}.(1,1) + \mathbb{R}.(a,b) = \mathbb{R}^2$.
3. Qu'obtient-on lorsque $a = b$?

Exercice 1.12. Soient E un K-espace vectoriel et S un ensemble non vide. Soit F l'ensemble des applications $f : S \to E$. Pour tous $f, g : S \to E$ et tout $a \in K$, on définit les applications $f + g$ et $a.f : S \to E$ par :

$$\forall\, x \in S, \quad (f+g)(x) \underset{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (a.f)(x) \underset{\text{def}}{=} a.f(x)\,.$$

1. Vérifier que F muni de ces deux opérations est un K-espace vectoriel. Quel est son élément neutre ?

Pour tout sous-ensemble T de S soit $F(T) = \{f \in F \mid \forall\, x \in T,\ f(x) = 0_E\}$. On a $F(\varnothing) = F$. Soient $A, B \subseteq S$.

2. Montrer que $F(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.
3. Montrer que si $A \subseteq B$ alors $F(B) \subseteq F(A)$.

4. Montrer que $F(A \cup B) = F(A) \cap F(B)$.
5. Montrer que $F(A \cap B) = F(A) + F(B)$.

2. Applications linéaires

Exercice 2.1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, x - y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, -y, x)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, -x - y)$.

Exercice 2.2. Montrer que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, y, x - z)$ est bijective et calculer l'application réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.3. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $f(V) = \{f(v)\,;\, v \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Soit W un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $f^{-1}(W) = \{v \in E \mid f(v) \in W\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2.4. Soient les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ données par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + y - z, x + 2y - z)$ et $g(x, y, z) = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y,\ -y + z,\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y + z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Montrer que $u \in f(V)$ si et seulement si $g(u) \in V$.
3. Montrer que $f(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 7y + 6z = 0\}$.

Exercice 2.5. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. Le graphe de f est le sous-ensemble de $E \times F$ défini par

$$\Gamma(f) = \{(u, f(u))\,;\, u \in E\}.$$

Montrer que f est linéaire si et seulement si $\Gamma(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

Exercice 2.6. Soient K un corps et $S(K) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, x_n \in K\}$ l'ensemble des suites à valeurs dans K. On munit $S(K)$ d'une structure de K-espace vectoriel en posant, pour tous $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$ et $a \in K$:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\text{def}}{=} (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad a.(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{\text{def}}{=} (ax_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

L'élément neutre de $S(K)$ est la suite constante dont tous les termes sont nuls. Soient les applications $f, g : S(K) \to S(K)$ données par

$$f\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad g\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)\,.$$

1. Montrer que les applications f et g sont linéaires.
2. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
3. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 2.7. Soient E un K-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que pour tout $v \in E$ il existe $\alpha \in K$ tel que $f(v) = \alpha v$. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $v \in E$, $f(v) = av$.

Exercice 2.8. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z,\, x - y + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
2. Calculer $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ et $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.
3. Montrer que f est surjective.

Exercice 2.9. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y,\, 3x - y,\, x - 3y). \end{aligned}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$. L'application g est-elle injective ?
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \langle (1, 3, 1), (1, -1, -3) \rangle$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$.
4. L'application g est-elle surjective ?

Exercice 2.10. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z,\, y + z,\, z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective.
2. Calculer $f(1, 0, 0)$, $f(-1, 1, 0)$ et $f(0, -1, 1)$.
3. Montrer que f est bijective.
4. Montrer que $f^{-1}(x, y, z) = (x - y, y - z, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.11. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - 2y + z,\, 2x + y - z,\, x + 3y - 2z). \end{aligned}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 2, 1), (-2, 1, 3), (1, -1, -2) \rangle$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$. L'application f est-elle surjective ?
4. Montrer que $V = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$.
5. Calculer $f(1, 1, 2)$, $f(1, 2, 3)$, et montrer que $\mathrm{Im}(f) = V$.

Exercice 2.12. Soient les applications linéaires

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (-x + 2y,\, x + y,\, x - 3y) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, -x - z). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + y + 3z = 0\}$ et déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que f n'est pas surjective et que g n'est pas injective.
3. Calculer $g \circ f$.
4. Montrer que f est injective et que g est surjective.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2.13. Soient E, F des K-espaces vectoriels. Soit l'application

$$\begin{aligned} \pi : E \times F &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto u\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que π est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\pi) = E$ et $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0_E\} \times F$.
3. Montrer que π est bijective si et seulement si $F = \{0_F\}$.

Exercice 2.14. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E. La restriction de f à V est l'application

$$\begin{aligned} f_{|V} : V &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto f(v). \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application $f_{|V}$ est linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{|V}) = V \cap \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f_{|V}) = f(V)$.

Exercice 2.15. Soient E, F, G des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $g \circ f = \mathbf{0}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 2.16. Soient E, F, G des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 2.17. Soient E, F des K-espaces vectoriels, $f, g : E \to F$ des applications linéaires, et $a, b \in K$. Soit $af + bg : E \to F$ l'application donnée par $(af + bg)(v) = af(v) + bg(v)$ pour tout $v \in E$.

1. Montrer que l'application $af + bg$ est linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(af + bg)$ et $\mathrm{Im}(af + bg) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 2.18. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Soit l'application

$$\begin{aligned} \sigma : V \times W &\longrightarrow E \\ (v, w) &\longmapsto v + w\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que σ est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\sigma) = V + W$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\sigma) = \{(u, -u)\,;\, u \in V \cap W\}$.
4. Montrer que σ est injective si et seulement si $V \cap W = \{0_E\}$.

3. Opérations sur les sous-espaces

Exercice 3.1. Soient $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $W = \{(a, a, a)\,;\, a \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Exercice 3.2. Soient $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0 \text{ et } y + t = 0\}$ et $W = \{(a, a, b, 0)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $V = \langle (1, 0, 1, 0)\,, (0, 1, 0, -1)\rangle$.
3. Montrer que $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } t = 0\}$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Exercice 3.3. Soit le sous-espace vectoriel $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $V = \langle (3, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle$.
2. Montrer que $V = \langle (1, 1, 1), (-2, 0, 1)\rangle$.
3. Montrer que $V = \mathbb{R}(3, 1, 0) \oplus \mathbb{R}(-2, 0, 1) = \mathbb{R}(1, 1, 1) \oplus \mathbb{R}(-2, 0, 1)$.

Exercice 3.4. Soient $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ et $W = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 1)\rangle$.

1. Montrer que $W = \mathbb{R}(1, 1, 1) \oplus \mathbb{R}(0, 0, 1)$.
2. Montrer que $V = \mathbb{R}(0, 1, 1) \oplus \mathbb{R}(1, 2, 0)$.
3. Montrer que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.
4. Montrer que$V \cap W = \mathbb{R}(1, 1, -1)$.
5. Montrer que $V + W = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3.5. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $(a, b, c) \notin V$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus \mathbb{R}(a, b, c)$.

Exercice 3.6. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $V \cap W = V + W$ si et seulement si $V = W$.

Exercice 3.7. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $V \cup W$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $V \subseteq W$ ou $W \subseteq V$.

Exercice 3.8. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $V = V + W$ si et seulement si $W \subseteq V$.

Exercice 3.9. Soient E un K-espace vectoriel et U, V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $U + (V \cap W) \subseteq (U + V) \cap (U + W)$.
2. Montrer que $(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U \cap (V + W)$.

Exercice 3.10. Soient E et F des K-espaces vectoriels. Soient

$$V = \{(u, 0_F) \in E \times F\,;\, u \in E\} \quad \text{et} \quad W = \{(0_E, v) \in E \times F\,;\, v \in F\}.$$

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $E \times F$.
2. Montrer que $E \times F = V \oplus W$.

Exercice 3.11. Soient E un K-espace vectoriel et U, V, W des sous-espaces vectoriels tels que $E = V \oplus W$ et $V \subseteq U$. Montrer que $U = V \oplus (U \cap W)$.

Exercice 3.12. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $f(V) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $E = V + \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3.13. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus V$. Soit $f_{|V} : V \to F$, $v \mapsto f(v)$ la restriction de f à V (cf. exercice 2.14).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{|V}) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f_{|V}) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que l'application $V \to \mathrm{Im}(f)$, $v \mapsto f(v)$ est bijective.

Exercice 3.14. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $f(V \cap W) \subseteq f(V) \cap f(W)$.
2. Montrer que $f(V + W) = f(V) + f(W)$.

On suppose que f est injective.

3. Montrer que $f(V \cap W) = f(V) \cap f(W)$.
4. Montrer que si $E = V \oplus W$ alors $\mathrm{Im}(f) = f(V) \oplus f(W)$.

Exercice 3.15. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Soit $f : E \to E$ une application linéaire bijective. Montrer que $E = f(V) \oplus f(W)$.

Exercice 3.16. Soient les sous-espaces vectoriels $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ et $W = \mathbb{R}(0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
2. Calculer la projection de (x, y, z) sur V parallèlement à W.

Exercice 3.17. Soient les sous-espaces vectoriels $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = 0\}$ et $W = \mathbb{R}(1, 0, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.
2. Calculer la projection de (x, y, z, t) sur V parallèlement à W.

Exercice 3.18. Soient $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0\}$, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - t = 0\}$ et $U = \mathbb{R}(1, 1, 1, 0)$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $V \cap W = \mathbb{R}(1, 0, -1, 0) \oplus \mathbb{R}(0, 1, 0, 1)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.
3. Calculer la projection de (x, y, z, t) sur V parallèlement à U.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
5. Calculer la projection de (x, y, z, t) sur U parallèlement à W.

Exercice 3.19. Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y,\ y + z,\ x + z). \end{aligned}$$

Soient $V = \langle f(e_1), f(e_3) \rangle$ et $W = \langle f(e_2) \rangle$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
3. Calculer la projection de (x, y, z) sur V parallèlement à W et sur W parallèlement à V.

Exercice 3.20. Soient E un K-espace vectoriel, V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$, et $p : E \to E$ la projection sur V parallèlement à W. Soit l'application

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow E \\ u &\mapsto u - p(u). \end{aligned}$$

1. Montrer que q est la projection sur W parallèlement à V.
2. Montrer que $(p \circ q)(u) = (q \circ p)(u) = 0_E$ et $p(u) + q(u) = u$ pour tout $u \in E$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 3.21. Soient E un K-espace vectoriel et U, V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus U = V \oplus W$. Soient p la projection sur V parallèlement à U et q la projection sur V parallèlement à W. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto p(v) - q(v). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
3. Montrer que $f \circ f = \mathbf{0}$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = V \oplus (U \cap W)$.
5. Montrer que $p = q$ si et seulement si $U = W$.

Exercice 3.22. Soient E un K-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = f$.

1. Soit $v \in E$. Montrer que $v - f(v) \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
5. Montrer que f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3.23. Soient E un K-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire. Soit

$$V = \{v \in V \mid (f \circ f)(v) = v\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $v \in V$. Montrer que $f(v) \in V$.

On suppose que $E = V \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Soit $p : E \to E$ la projection sur V parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Soit l'application

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u - p(u) + f(p(u)). \end{aligned}$$

3. Montrer que g est linéaire.
4. Soient $v \in V$ et $w \in \mathrm{Ker}(f)$. Calculer $g(v)$ et $g(w)$.
5. Montrer que g est bijective. Quel est son inverse ?

4. Sous-espaces engendrés

Exercice 4.1. Soient E un K-espace vectoriel et $u, v, w \in E$. Montrer que $\langle u \rangle + \langle v \rangle + \langle w \rangle = \langle u \rangle + \langle v, w \rangle = \langle u, v, w \rangle$.

Exercice 4.2. Soient $f : E \to F$ une application linéaire, $v_1, \ldots, v_n \in E$, et $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Montrer que $f(V) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$.

Exercice 4.3. Soient E un K-espace vectoriel et $u, v, w \in E$.

1. Montrer que $\langle u, v \rangle = \langle u, u + v \rangle$.
2. Montrer que $\langle u, v, w \rangle = \langle u, u + v, u + v + w \rangle$.

Exercice 4.4. Soient $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $u_a = (a, a - 1, a) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\langle v, w \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.
2. Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que $\langle v, w \rangle = \langle u_a, v, w \rangle$.

Exercice 4.5. Soient $u = (1, -1, -1)$, $v = (0, 3, 1)$ et $w = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\langle v, w \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.
2. Montrer que $\langle v, w \rangle = \langle u, v \rangle$.

Exercice 4.6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u, v \in E$. Montrer que $\langle u, v \rangle = \langle u + v, u - v \rangle$.

Exercice 4.7. Soient $u = (1, 2, -1)$, $v = (0, 1, 2)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ soit $w_a = (a, 1+a, 1-a) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\langle u, v \rangle = \langle u - 2v, v \rangle$.
2. Montrer que $\langle u, v \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y + z = 0\}$.
3. Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que $\langle u, v \rangle = \langle u, w_a \rangle$.

Exercice 4.8. Soit l'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$.

1. Montrer que S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\langle (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\langle S \rangle = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.9. Soit E un K-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$. Soient V un sous-espace vectoriel de E tel que $V \neq E$ et $E \setminus V = \{u \in E \mid u \notin V\}$.

1. Soient $v \in V$ et $u \in E \setminus V$. Montrer que $v - u \in E \setminus V$.
2. Montrer que $\langle E \setminus V \rangle = E$.