February 3, 2017

ALGÈBRE LINÉAIRE - EXERCICES 2

Contents

1. Bases

Exercice 1.1. La suite $((1,0,1),(0,1,0),(1,1,1))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 1.2. Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Les suites de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles une base de V ?

(a) $((1,1,0),(0,1,1))$
(b) $((1,0,-1),(0,1,1),(1,2,1))$
(c) $((-1,0,1),(2,0,-2))$
(d) $((1,2,1),(1,1,1),(1,0,-1))$.

Exercice 1.3. Soient les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de (x,y,z) dans la base (u_1,u_2,u_3).

Exercice 1.4. Soient $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$ et $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $u = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (v_1,v_2) est une base de V.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus \langle u \rangle$.
3. Montrer que (v_1,v_2,u) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les coordonnées de (x,y,z) dans la base (v_1,v_2,u).
5. Soit p la projection sur V parallèlement à $\langle u \rangle$. Calculer $p(x,y,z)$.

Exercice 1.5. Soient E un K-espace vectoriel, $n \geq 2$, et $v_1,\dots,v_n \in E$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite $(v_1,\dots,v_n)$ est libre.

(1) Il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $v_i = 0_E$.
(2) Il existe $1 \leq i,j \leq n$ tels que $i \neq j$ et $v_i = v_j$.
(3) Il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $v_i = \sum_{i \neq j} a_j v_j$, $a_j \in K$.

Exercice 1.6. Soient E un K-espace vectoriel, $n \geq 2$, et $v_1,\dots,v_n \in E$. Pour $1 \leq i \leq n$ soit $V_i = \langle\, v_j\ ;\ 1 \leq j \leq n \text{ et } j \neq i \,\rangle$. Montrer que $(v_1,\dots,v_n)$ est libre si et seulement si $v_i \notin V_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 1.7. Soient les sous-espaces vectoriels $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$. Soient $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0-1)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, et $w = (0, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $V \cap W$.
2. Montrer que (u_1, u_2, v) est une base de V.
3. Montrer que (u_1, u_2, w) est une base de W.
4. Montrer que (u_1, u_2, v, w) est une base de $V + W$.

Exercice 1.8. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si (u, v) est libre et $w \notin \langle u, v\rangle$.

Exercice 1.9. Soit (u, v, w) une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $(u + av, au + v)$ est libre.
2. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $u + v \in \langle u + av, au + v\rangle$.
3. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $(u + av, au + v, u + v + aw)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.10. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ay + z = 0\}$.

1. Montrer que $((1, 0, -1), (a, -1, 0))$ est une base de V_a.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Montrer que $((1, 0, -1))$ est une base de $V_a \cap V_b$.
3. Montrer que $((1, 0, -1), (a, -1, 0), (b, -1, 0))$ est une base de $V_a + V_b$ ssi $a \neq b$.

Exercice 1.11. Soient E un K-espace vectoriel et $u, v \in E$ tels que (u, v) est libre. Soient $a, b, c, d \in K$. Montrer que $(au + cv, bu + dv)$ est libre si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 1.12. Soient E un K-espace vectoriel, $n \geq 1$, et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Soient $a_1, \ldots, a_n \in K$. Montrer que $(a_1v_1, \ldots, a_nv_n)$ est une base de E si et seulement si $a_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Exercice 1.13. Soient E, F des K-espaces vectoriels, $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre, et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ est libre si et seulement si $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 1.14. Soient E un K-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_n \in E$. Soit l'application linéaire

$$f : K^n \longrightarrow E$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto a_1v_1 + \ldots + a_nv_n\,.$$

1. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice de E si et seulement si f est surjective.
2. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre si et seulement si f est injective.
3. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si f est bijective.

Exercice 1.15. Soient E un K-espace vectoriel, $n \geq 2$, et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Soient $1 \leq m < n$ et $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $W = \langle v_{m+1}, \ldots, v_n\rangle$.

1. Montrer que $(v_1, \ldots, v_m)$ est une base de V et que $(v_{m+1}, \ldots, v_n)$ une base de W.
2. Montrer que $E = V \oplus W$.

Exercice 1.16. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Soient $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de V et $(v_{m+1}, \ldots, v_n)$ une base de W, avec $1 \leq m \leq n$. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $E = V \oplus W$.

Exercice 1.17. Soient E et F des K-espaces vectoriels. Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de F. Montrer que

$$\big((u_1, 0_F), \ldots, (u_n, 0_F), (0_E, v_1), \ldots, (0_E, v_m)\big)$$

est une base du K-espace vectoriel $E \times F$.

Exercice 1.18. Soient $P_1(X), \ldots, P_s(X) \in K[X]$ tels que $0 \leq \deg P_1 < \ldots < \deg P_s$. Montrer que $(P_1(X), \ldots, P_s(X))$ est libre.

Exercice 1.19. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $f, g \in E$. On suppose qu'il existe $x, y \in [0,1]$ tels que $f(x)g(y) - f(y)g(x) \neq 0$. Montrer que (f, g) est libre.

Exercice 1.20. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - z,\ y + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Montrer que $h \circ f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} g_{a,b} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (ax + by,\ (1-a)x + (1-b)y,\ (a-1)x + by). \end{aligned}$$

3. Montrer que $g_{a,b}$ est injective.
4. Montrer que $((a, 1-a, a-1), (b, 1-b, b))$ est une base de $\mathrm{Im}(g_{a,b})$.
5. Montrer que $f \circ g_{a,b} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.21. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + ay + a^2 z,\ x + a^2 y + az). \end{aligned}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$ et une base de $\mathrm{Im}(f_a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.22. Soient E, F des K-espaces vectoriels, $v_1, \ldots, v_n \in E$, et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer les implications suivantes :

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ libre et $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Rightarrow (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ libre.
2. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = E$ et $\mathrm{Im}(f) = F \Rightarrow \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle = F$.
3. $(v_1, \ldots, v_n)$ base de E et f bijective $\Rightarrow (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ base de F.

2. Dimension

Exercice 2.1. Soient les sous-espaces vectoriels $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer $\dim(V \cap W)$.
2. Déterminer $\dim V$ et $\dim W$.
3. Montrer que $V + W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2.2. Soient les sous-espaces vectoriels $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = 0 \text{ et } y + z + t = 0\}$ et $W = \langle(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer $\dim V$.
2. Déterminer $\dim W$.
3. Montrer que $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.
4. Montrer que $V + W = \mathbb{R}^4$.
5. Déterminer $\dim(V \cap W)$.

Exercice 2.3. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y, y - z, z + t)$. Soit le sous-espace vectoriel $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z - 2t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer $\dim \mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer $\dim V$.
4. Déterminer $\dim f(V)$.

Exercice 2.4. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

1. Soient $1 \leq r < n$ et $v_1, \ldots, v_r \in E$. Montrer que $\langle v_1, \ldots, v_r\rangle \neq E$.
2. Soit $v_1 \neq 0_E$ et pour $1 \leq r < n$ soit $v_{r+1} \in E$ tel que $v_{r+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_r\rangle$. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

Exercice 2.5. Soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ (cf. exercice 1.17).

Exercice 2.6. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Montrer que $\dim E = \dim V + \dim W$ (cf. exercice 1.16).

Exercice 2.7. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E = V \oplus W$ ssi $\dim(V \cap W) = 0$ et $\dim V + \dim W = \dim E$.

Exercice 2.8. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Soient $r = \dim V$, $s = \dim W$, $t = \dim(V \cap W)$, et $(u_1, \ldots, u_t)$ une base de $V \cap W$.

1. Montrer qu'il existe $v_{t+1}, \ldots, v_r \in V$ tels que $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_r)$ est une base de V et $w_{t+1}, \ldots, w_s \in W$ tels que $(u_1, \ldots, u_t, w_{t+1}, \ldots, w_s)$ est une base de W.
2. Montrer que $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_r, w_{t+1}, \ldots, w_s)$ est une base de $V + W$.
3. Montrer que $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.

Exercice 2.9. Soient K un corps et $n \in \mathbb{N}$. Avec la convention $\deg(0) = -\infty$ soit $K[X]_n = \{P(X) \in K[X] \mid \deg(P) \leq n\}$.

1. Soient $P(X), Q(X) \in K[X]$. Montrer que $\deg(P + Q) \leq \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q))$.
2. Montrer que $K[X]_n$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.
3. Montrer que $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $K[X]_n$.
4. Montrer que $\dim K[X]_n = n + 1$.

Exercice 2.10. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (ax + y,\ ay + z,\ a^2x - z). \end{aligned}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.
2. Montrer que $((0,1,-1),(1,a,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f_a)\cap\mathrm{Ker}(f_b))=1$ si $a=b$, 0 si $a\neq b$.
4. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f_a)+\mathrm{Ker}(f_b))=1$ si $a=b$, 2 si $a\neq b$.
5. Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(f_a)\cap\mathrm{Im}(f_b))=2$ si $a=b$, 1 si $a\neq b$.
6. Montrer que $\mathrm{Im}(f_a)+\mathrm{Im}(f_b)=\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a\neq b$.

Exercice 2.11. Soient E,F des K-espaces vectoriels et $f:E\to F$ une application linéaire.

1. Soit W un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $f(f^{-1}(W))=W\cap\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $f^{-1}(f(V))=V+\mathrm{Ker}(f)$.
3. On suppose que $E=F$ et $\dim E=3$. Soient (u,v,w) une base de E et $p:E\to E$ la projection sur $\langle v,w\rangle$ parallèlement à $\langle u\rangle$. Déterminer $p(p^{-1}(\langle u+v+w\rangle))$, $p^{-1}(p(\langle u+v+w\rangle))$, et calculer leur dimension.

Exercice 2.12. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ et $f\in\mathrm{End}_K(E)$ telle que $f^n=\mathbf{0}$ et $f^{n-1}\neq\mathbf{0}$. Soit $v\in E$ tel que $f^{n-1}(v)\neq 0_E$. Montrer que $(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v))$ est une base de E.

Exercice 2.13. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V,W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E=V+W$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W_0 de W tel que $E=V\oplus W_0$.

Exercice 2.14. Soient E,F des K-espaces vectoriels de dimension finie et $f:E\to F$ une application linéaire.

1. Montrer que f est injective ssi l'image par f de toute suite libre est libre.
2. Montrer que f est surjective ssi l'image par f de toute suite génératrice de E est génératrice de F.
3. Montrer que f est bijective ssi l'image par f de toute base de E est une base de F.

Exercice 2.15. Soient E,F des K-espaces vectoriels de dimension finie, $(u_1,\ldots,u_n)$ une base de E, et $v_1,\ldots,v_n\in F$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f:E\to F$ telle que $f(u_i)=v_i$ pour tout $1\leq i\leq n$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $(v_1,\ldots,v_n)$ est une base de F.
3. Montrer que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes ssi $\dim E=\dim F$.

Exercice 2.16. Soient K un corps contenant $\mathbb{Q}$, $n\in\mathbb{N}$, et $a\in K$. Soit l'application

$$\begin{aligned}\theta_a : K[X]_n &\longrightarrow K[X]_n\\ P(X) &\longmapsto P(X-a).\end{aligned}$$

1. Montrer que θ_a est linéaire.
2. Montrer que $\theta_a\circ\theta_{-a}=\theta_{-a}\circ\theta_a=\mathrm{Id}_{K[X]_n}$.
3. Montrer que $(1,(X-a),\ldots,(X-a)^n)$ est une base de $K[X]_n$.
4. Soit $P(X)\in K[X]_n$. Pour $k\in\mathbb{N}$ soit $P^{(k)}(X)$ la dérivée k-ième de $P(X)$. Montrer que
$$P(X)=\sum_{0\leq k\leq n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,(X-a)^k\,.$$

Exercice 2.17. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $f \in \mathrm{Aut}_K(E)$. Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E.
2. Soit $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bases de E. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \phi_B : \mathrm{Aut}_K(E) &\longrightarrow \mathcal{B}(E) \\ f &\longmapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$
est bijective.
3. Soient p un nombre premier et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps à p éléments. Montrer que
$$|\mathrm{Aut}_K(E)| = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq k \leq n} (p^k - 1)\,.$$

3. Le théorème du rang

Exercice 3.1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + 2y,\ x - y,\ 2x - y)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z,\ x + 2y - z)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y,\ y - z, -x + z)$.
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + z,\ x + y,\ 2x + y + z,\ y - z)$.
5. $f_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (x - t, -y - z, -x + 2y + 2z + t)$.
6. $f_6 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \mapsto (x - z,\ y - t,\ x + 2y - z - 2t, -2x + 3y + 2z - 3t)$.

Exercice 3.2. Soient les applications linéaires
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, y + z) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x - y, -x + 2y). \end{aligned}$$

1. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim \mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(g)$ et $\dim \mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 3.3. Soit l'application linéaire
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z,\ x - y + z,\ x + 2y + z). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y - z = 0\}$.
2. Soit $U = \mathbb{R}(1, 0, 3)$. Déterminer une base de $f^{-1}(U)$.
3. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$. Déterminer une base de $f^{-1}(V)$.

Exercice 3.4. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit l'application linéaire
$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + ay,\ ax + y,\ x + y + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est bijective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f_a n'est pas bijective. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$ et une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

Exercice 3.5. Pour $a \in \mathbb{C}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \big((1-a)x + y,\ x + z,\ x + y + az\big). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f_a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + ay - z = 0\}$.
2. Déterminer les $a \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(f_a) \oplus \mathrm{Im}(f_a)$.

Exercice 3.6. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (y - z,\ ax + by + z). \end{aligned}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_{a,b})$ et une base de $\mathrm{Im}(f_{a,b})$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.7. Pour $a \in \mathbb{R}$ soient les sous-espaces vectoriels $W = \mathbb{R}(1, 1, 1)$ et $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ay - az = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V_a \oplus W$.
2. Soit p_a la projection sur V_a parallèlement à W. Déterminer $\mathrm{Ker}(p_a \circ p_b)$ et $\mathrm{Im}(p_a \circ p_b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.8. Soient K un corps, $a \in K$, $n \geq 1$, et $\varphi_a : K[X]_n \to K$, $P(X) \mapsto P(a)$.

1. Montrer que l'application φ_a est linéaire.
2. Montrer que $(X - a,\ X^2 - aX,\ \ldots,\ X^n - aX^{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$.

Exercice 3.9. Soit $n \geq 1$. Soit la dérivation $\delta : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$, $P(X) \mapsto P'(X)$.

1. Montrer que l'application δ est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\delta)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\delta)$.
3. Soit $k \geq 1$ entier. Déterminer $\dim \mathrm{Im}(\delta^k)$ et $\dim \mathrm{Ker}(\delta^k)$.

Exercice 3.10. Soit $n \geq 1$. Soit $\gamma : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}$, $P(X) \mapsto P'(0)$.

1. Montrer que l'application γ est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\gamma)$.

Exercice 3.11. Soient K un corps et $n \geq 2$. Soit l'application $\psi : K[X]_n \to K \times K$, $P(X) \mapsto (P(0), P(1))$.

1. Montrer que l'application ψ est linéaire.
2. Montrer que l'application ψ est surjective.
3. Montrer que $(X^2 - X,\ X^3 - X^2,\ \ldots,\ X^n - X^{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 3.12. Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que $\dim F = 1$.

1. Montrer que f est surjective ou bien f est nulle.
2. On suppose que f n'est pas nulle. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - 1$.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$. Montrer que $\dim V = 2$ si et seulement si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exercice 3.13. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (cy - bz, -cx + az,\ bx - ay). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}(a, b, c)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3.14. Soient E, F, G des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. Soit l'application linéaire $h : \mathrm{Im}(f) \to G, y \mapsto g(y)$ (restriction de g au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ de F).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
3. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f))$.
4. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) \leq \mathrm{Min}(\dim \mathrm{Im}(g), \dim \mathrm{Im}(f))$.

Exercice 3.15. Soient E un K-espace vectoriel et $f, g : E \to E$ des applications linéaires telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que g est injective.
2. Montrer que $(g \circ f)(v) = v$ pour tout $v \in \mathrm{Im}(g)$.
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 3.16. Soit $\mathcal{S}(K)$ le K-espace vectoriel des suites d'éléments de K indexées par $\mathbb{N}$. Soient $f, g : \mathcal{S}(K) \to \mathcal{S}(K)$ les applications données par $f(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et $g(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(K)$.

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Montrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(K)}$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $h \circ f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(K)}$ pour toute application linéaire $h : \mathcal{S}(K) \to \mathcal{S}(K)$.

Exercice 3.17. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim f(V) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap V).$$

Exercice 3.18. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. Soit W un sous-espace vectoriel de F.

1. Montrer que $f(f^{-1}(W)) = \mathrm{Im}(f) \cap W$.
2. Montrer que

$$\dim f^{-1}(W) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap W).$$

Exercice 3.19. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f \circ f) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f))$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ ssi $\dim \mathrm{Im}(f \circ f) = \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3.20. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $f(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Soit l'application linéaire $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, $v \mapsto f(v)$.

2. Montrer que g est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si g est bijective.

Exercice 3.21. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. Soit V un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus V$ et que $f(V) \subseteq V$. Montrer que $V = \mathrm{Ker}(f)$.
2. On suppose que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus V$ et que $f(V) \subseteq V$. Montrer que $V = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3.22. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f \circ f) - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Im}(f \circ f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3.23. Soient E, F, G des K-espaces vectoriels. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires telles que f est injective, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, et g est surjective. Montrer que $\dim E - \dim F + \dim G = 0$.

Exercice 3.24 (Formule de Grassmann)**.** Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Soit l'application

$$\begin{aligned} \sigma : V \times W &\longrightarrow E \\ (v, w) &\longmapsto v + w\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que σ est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\sigma) = V + W$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\sigma) = \{(u, -u) \in V \times W \mid u \in V \cap W\}$.
4. Montrer que l'application $V \cap W \to \mathrm{Ker}(\sigma)$, $u \mapsto (u, -u)$ est linéaire bijective.
5. Montrer que $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.

Exercice 3.25. Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Pour tout sous-espace vectoriel U de E, on pose $U_0 = U \cap \mathrm{Ker}(f)$. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $f(V \cap W) \subseteq f(V) \cap f(W)$ et $V_0 + W_0 \subseteq (V + W)_0$.
2. Montrer que $\dim f(V) \cap f(W) - \dim f(V \cap W) = \dim(V + W)_0 - \dim(V_0 + W_0)$. (Utiliser 3.17 et 3.24.)
3. Montrer que $f(V \cap W) = f(V) \cap f(W)$ ssi $V_0 + W_0 = (V + W)_0$.

Exercice 3.26. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose qu'il existe une application linéaire surjective $f : E \to K$ telle que $V = \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $\dim V = \dim E - 1$.
2. On suppose que $\dim V = \dim E - 1$.
   (a) Soit $u \in E$ tel que $u \notin V$. Montrer que $E = V \oplus Ku$.
   (b) Montrer que l'application $\gamma : K \to Ku$, $a \mapsto au$ est linéaire bijective.
   (c) Soit p la projection sur Ku parallèlement à V. Montrer que $\gamma^{-1} \circ p : E \to K$ est linéaire surjective et que $\mathrm{Ker}(\gamma^{-1} \circ p) = V$.

Exercice 3.27. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose qu'il existe une application linéaire $f : E \to E$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = V$ et $\mathrm{Im}(f) = W$. Montrer que $\dim V + \dim W = \dim E$.
2. On suppose que $\dim V + \dim W = \dim E$.
   (a) Soit U un sous-espace vectoriel de E tel que $E = U \oplus V$. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $\varphi : U \to W$.
   (b) Soit p la projection sur U parallèlement à V. Montrer que l'application $f : E \to E$, $u \mapsto \varphi(p(u))$ est linéaire et que $\mathrm{Ker}(f) = V$, $\mathrm{Im}(f) = W$.