Algèbre linéaire et géométrie II, janvier 2017

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Si V est un sous-espace vectoriel de E stable par f, on note $f_V \in \mathrm{End}_K(V)$ l'application $V \to V$, $v \mapsto f(v)$. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E stables par f tels que $E = V \oplus W$.

1. Montrer que $M_f = \mathrm{ppcm}(M_{f_V}, M_{f_W})$.
2. Montrer que f est diagonalisable (resp. nilpotent, jordanisable) ssi f_V et f_W le sont.
3. Montrer que si f est diagonalisable et $V = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ avec $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, alors

$$W = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathrm{Spec}(f) \\ \mu \neq \lambda}} \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{Id}_E).$$

Exercice 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $P_f(X)$ est scindé dans $K[X]$. Soit

$$R_f(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} (X - \lambda).$$

1. Montrer que $R_f(f)$ est nilpotent. Quel est son indice de nilpotence ?
2. Soit $P(X) \in K[X]$. Montrer que $P(f)$ est nilpotent ssi $R_f \mid P$.
3. Montrer que f est diagonalisable ssi tout polynôme en f nilpotent est nul.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. Pour $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ soit la propriété

$$(*) \quad \text{Pour tout sous-espace vectoriel } V \subseteq E,\ f^{-1}(V)^{\perp} = f(V^{\perp}).$$

1. Montrer qu'un endomorphisme symétrique vérifie la propriété $(*)$.

Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifiant la propriété $(*)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel tel que $f(V) = V$. Montrer que $f(V^{\perp}) = V^{\perp} \cap \mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que f est diagonalisable ssi f est symétrique.
5. Donner un exemple d'endomorphisme non diagonalisable vérifiant $(*)$.