Algèbre linéaire et géométrie II, janvier 2018

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathrm{End}_K(E)$ dont la matrice dans une base B de E est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M_B(f - \mathrm{Id}_E)^2$ et montrer que $f^n = \mathrm{Id}_E + n(f - \mathrm{Id}_E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de f.
3. Déterminer une matrice de Jordan pour f s'il y a lieu.
4. Soit $P(X) \in K[X]$. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable ssi $P'(1) = 0$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel non nul de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $P_f(X)$ est scindé dans $K[X]$. Soient $V \neq \{0_E\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par f et

$$U = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E).$$

1. Montrer que V contient un vecteur propre de f.
2. Déterminer le polynôme minimal de la restriction de f à U.
3. Montrer que $V \cap U = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} V \cap \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 3. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Montrer que
$$\mathrm{Im}(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E) = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathrm{Spec}(f) \\ \mu \neq \lambda}} \mathrm{Ker}(f - \mu \, \mathrm{Id}_E).$$
2. Montrer que f^t est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(f^t) = \mathrm{Spec}(f)$.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(f^t - \lambda \, \mathrm{Id}_E) = \bigcap_{\substack{\mu \in \mathrm{Spec}(f) \\ \mu \neq \lambda}} \mathrm{Ker}(f - \mu \, \mathrm{Id}_E)^{\perp}.$$
4. Montrer que $f^t = f$ ssi les sous-espaces propres de f sont deux-à-deux orthogonaux.