Algèbre linéaire et géométrie II, janvier 2019

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans une base B est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de f.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.
3. Déterminer tous les endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f.

Exercice 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ dont la matrice dans une base B est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Jordanisable ? Déterminer une matrice de Jordan pour f s'il y a lieu.
2. Soit $P(X) \in K[X]$. Montrer que $\mathrm{Spec}(P(f)) = \{P(0), P(1)\}$.
3. Déterminer les $P(X) \in K[X]$ tels que $P(f)$ est une projection.

Exercice 3. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ une isométrie symétrique.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
2. Soient $u, v \in E$ tels que $f(u) = u$, $f(v) = -v$ et $\|u\| = \|v\|$. Montrer que $f(u+v) \perp u+v$.
3. Montrer que s'il existe un sous-espace V de E tel que $f(V) = V^{\perp}$ alors $\dim E$ est paire.
4. On suppose que $\dim E = 2$. Déterminer les isométries symétriques f de E pour lesquelles il existe un sous-espace V de E tel que $f(V) = V^{\perp}$.