Algèbre linéaire et géométrie II, août 2017

Documents autorisés.

Exercice 1. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans une base B de $\mathbb{R}^4$ est

$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Spec}(f_a)$. Quels sont les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est jordanisable ?
2. Déterminer la dimension des sous-espaces caractéristiques et propres de f_a.
3. Déterminer une matrice de Jordan pour f_a lorsqu'il y a lieu. Quels sont les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est diagonalisable ?

Exercice 2. Soient B une base de $\mathbb{R}^2$ et $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$M_B(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_B(f_2) = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_B(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de f_i pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$ déterminer le nombre de sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ stables par f_i.
3. Déterminer les $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ ayant plus de 5 sous-espaces stables.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien.

1. Soit $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $g^t \circ g^2 = 0$.
   (a) Montrer que $g^2 = 0$.
   (b) Montrer que si g est symétrique alors $g = 0$.
2. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $f^t \circ f^2 = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Montrer que f est symétrique.
   (b) Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.