Algèbre linéaire et géométrie II, août 2018

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans une base B est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Jordanisable ? Déterminer une matrice de Jordan pour f s'il y a lieu.
3. Déterminer l'ensemble des $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(f)$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ dont la matrice dans une base B est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est diagonalisable et déterminer son polynôme minimal.
2. Montrer qu'il existe $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $h^2 = f$, $h \circ f = f \circ h$ et h est diagonalisable.
3. Soit $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que g est jordanisable et que $\mathrm{Spec}(g) = \{0, \lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$.
4. Montrer qu'il existe une infinité de $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tels que $g^2 = f$ et $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ de polynôme minimal $M_f(X) = X^n$ qui est jordanisable dans une base orthonormale de E.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $f(e_1) = 0_E$ et $f(e_k) = e_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n$.
2. Déterminer $f^t(e_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
3. Montrer que $f \circ f^t$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$ et que $f^t \circ f$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(f)^\perp$.