November 8, 2019

ALGÈBRE LINÉAIRE II

Contents

1. Formes bilinéaires

1.1. Dualité.

Exercice 1.1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Soit $V^0 = \{\eta \in E^* \mid \forall\, v \in V,\, \eta(v) = 0\}$.

1. Montrer que $(V + W)^0 = V^0 \cap W^0$.
2. Montrer que $(V \cap W)^0 = V^0 + W^0$.
3. Montrer que $E = V \oplus W$ si et seulement si $E^* = V^0 \oplus W^0$.

Exercice 1.2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. La codimension d'un sous-espace vectoriel V de E est $\operatorname{codim} V = \dim E - \dim V$. Soient $\eta, \eta_1, \dots, \eta_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in E^*$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(\eta)^0 = \langle \eta \rangle$.
2. Montrer que $\dim \cap_{1 \le i \le r} \operatorname{Ker}(\eta_i) = \operatorname{codim}\langle \eta_1, \dots, \eta_r \rangle$.
3. Montrer que $\cap_{1 \le i \le r} \operatorname{Ker}(\eta_i) = \cap_{1 \le j \le s} \operatorname{Ker}(\varepsilon_j)$ ssi $\langle \eta_1, \dots, \eta_r \rangle = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \rangle$.
4. Montrer que tout sev de E de codimension r est intersection de r hyperplans.

Exercice 1.3. Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que l'application $\operatorname{Hom}_K(E, F) \to \operatorname{Hom}_K(F^*, E^*)$, $f \mapsto f^*$ est linéaire et bijective.

Exercice 1.4. Soient la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ et B^* la base duale de B. Soit $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_{B^*}(f^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.

1.2. **Formes bilinéaires symétriques non-dégénérées.**

Exercice 1.5. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to K$ symétrique non-dégénérée. Soient $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et $\psi : E \times E \to K$, $(u, v) \mapsto \varphi(f(u), f(v))$.

1. Montrer que ψ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que ψ est non-dégénérée si et seulement si f est bijectif.
3. Soit B une base de E. Déterminer $M_B(\psi)$ en fonction de $M_B(\varphi)$ et $M_B(f)$.

Exercice 1.6. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Soit

$$S(E) = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid f^{\,t} = f\}.$$

1. Montrer que $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_K(E)$.
2. Soient $f, g \in S(E)$. Montrer que $f \circ g \in S(E)$ ssi $f \circ g = g \circ f$.
3. Le sous-espace vectoriel $S(E)$ est-il un sous-anneau de $\mathrm{End}_K(E)$?

Exercice 1.7. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Soient $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $f(V) \subseteq V$ si et seulement si $f^t(V^\perp) \subseteq V^\perp$.

Exercice 1.8. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f^t) = \mathrm{Im}(f)^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^t) = \mathrm{Ker}(f)^\perp.$$

Exercice 1.9. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$ et $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à W.

1. Montrer que p^t est la projection sur $W^\perp$ parallèlement à $V^\perp$.
2. Montrer que $p^t = p$ si et seulement si $W = V^\perp$.

1.3. **Formes bilinéaires symétriques définies.**

Exercice 1.10. Soit $W = \mathbb{R}(1, 0, -1, 0) \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une base de $W^\perp$ orthonormale pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.11. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie. On considère la relation binaire suivante sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E :

$$V \perp W \quad \text{ssi} \quad V \subseteq W^\perp.$$

Cette relation binaire est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 1.12. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $V \perp W$. Montrer que $V^\perp \perp W^\perp$ si et seulement si $W = V^\perp$.

Exercice 1.13. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie. Soient V un sous-espace vectoriel de E et $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à $V^\perp$. Montrer que $p^t = p$.

Exercice 1.14. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^t \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f \circ f^t) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 1.15. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie. Soit $p \in \mathrm{End}_K(E)$ une projection. Montrer que p et p^t commutent si et seulement si $p = p^t$.

1.4. **Espaces euclidiens.**

Exercice 1.16. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée pour tous $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de φ est un espace euclidien.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ orthonormale pour φ.

Exercice 1.17. Pour $n \geq 1$ entier soient

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = 1_n\} \quad \text{et} \quad SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. Est-il normal dans $GL_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) = \pm 1$.
3. Montrer que $SO_n(\mathbb{R}) \lhd O_n(\mathbb{R})$ et que $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 1.18. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien (E, φ). Soit $\mathcal{B}_{\mathrm{on}}(E)$ l'ensemble des bases orthonormales de E.

1. Montrer que si $h \in \mathrm{Aut}_\varphi(E)$ alors $(h(e_1), \ldots, h(e_n))$ est une base orthonormale.
2. Montrer que l'application $\mathrm{Aut}_\varphi(E) \to \mathcal{B}_{\mathrm{on}}(E)$, $h \mapsto (h(e_1), \ldots, h(e_n))$ est bijective.

Exercice 1.19. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(E)$. Montrer que f est une isométrie si et seulement si $\|f(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in E$.

2. Réduction des endomorphismes

2.1. **Diagonalisation.**

Exercice 2.1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E, $a \in K$, $m \in \mathbb{N}$, et $v \in E$.

1. Montrer que $\{0_E\}$, E, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.
2. Montrer que si V et W sont stables par f alors $V \cap W$ et $V + W$ le sont aussi.
3. Montrer que $C_f(v) = \langle f^k(v)\,;\, k \in \mathbb{N}\rangle$ est stable par f.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)^m$ et $\mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id}_E)^m$ sont stables par f.

Exercice 2.2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Pour chaque $f_i \in \mathrm{End}_K(E)$ ci-dessous déterminer les sous-espaces de E stables par f_i.

$$\text{(a)} \quad M_B(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad M_B(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad M_B(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes de E qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de E.

Exercice 2.4. Pour $K = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$, étudier la diagonalisabilité des endomorphismes de K^3 représentés dans une base (e_1, e_2, e_3) par les matrices de $M_3(K)$ suivantes. Déterminer une base de vecteurs propres lorsqu'il y a lieu.

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la diagonalisabilité dans $M_3(\mathbb{R})$ des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.6. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Soit $n \geq 1$ entier. Montrer que si f est diagonalisable alors f^n est diagonalisable.
2. Donner un exemple de $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que f^2 est diagonalisable et f ne l'est pas.

Exercice 2.7. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathrm{End}_K(E)$, et $P(X) \in K[X]$.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $P(f)$ l'est.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ alors $P(\lambda) \in \mathrm{Spec}(P(f))$.

Exercice 2.8. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soit $P(X) \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$. Montrer que $P(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$.

Exercice 2.9. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E stables par f tels que $E = V \oplus W$.

1. Montrer que $\det(f) = \det(f_{|V}) \det(f_{|W})$.
2. Montrer que $P_f(X) = P_{f_{|V}}(X) P_{f_{|W}}(X)$.

Exercice 2.10. Soit E un K-espace vectoriel.

1. Soient $f, g \in \mathrm{End}_K(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}\, g) \subseteq \mathrm{Ker}\, g$.
2. Soient $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et $P(X) \in K[X]$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}\, P(f)) \subseteq \mathrm{Ker}\, P(f)$.

Exercice 2.11. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.

2.2. **Polynômes annulateurs.**

Exercice 2.12. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E stables par f tels que $E = V \oplus W$. Montrer que $M_f = \mathrm{ppcm}(M_{f_{|V}}, M_{f_{|W}})$.

Exercice 2.13. Calculer les polynômes caractéristiques et les polynômes minimaux des matrices suivantes :

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)}\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.14. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $g \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $g^m = 0$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathrm{Spec}(g) = \{0\}$ et que $g^n = 0$.
2. Montrer que g est diagonalisable si et seulement si $g = 0$.

Exercice 2.15. Déterminer les matrices $A \in M_3(\mathbb{C})$ telles que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.16. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $M_f(X)$ divise $M_{f^2}(X^2)$.
2. Donner un exemple avec $M_f(X) = M_{f^2}(X^2)$ et un avec $M_f(X) \neq M_{f^2}(X^2)$.

Exercice 2.17. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $\det(f) = 0$. Montrer qu'il existe un sous-espace supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ stable par f si et seulement si 0 est racine simple de $M_f(X)$.

Exercice 2.18. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f \in \mathrm{End}_K(E)$ un endomorphisme diagonalisable et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si $f(V) \subseteq V$ alors $f_{|V}$ est diagonalisable.
2. Montrer que $f(V) \subseteq V$ ssi V possède une base constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 2.19. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $P_f(X)$ est irréductible dans $K[X]$.

1. Montrer que $M_f(X) = P_f(X)$.
2. Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer que $B = (v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est une base de E.
3. Déterminer $M_B(f)$ en fonction des coefficients de $P_f(X)$.

Exercice 2.20. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et $P \in K[X]$. Montrer que $P(f)$ est bijectif si et seulement si $\mathrm{pgcd}(P, M_f) = 1$.

2.3. **Trigonalisation.**

Exercice 2.21. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'un endomorphisme de E diagonalisable et nilpotent est nul.

Exercice 2.22. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $f, g \in \mathrm{End}_K(E)$ nilpotents.

1. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors $f + g$ est nilpotent. (Calculer $(f+g)^{2n}$.)
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus que f et g commutent ?

Exercice 2.23. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Déterminer la décomposition de Jordan-Chevalley des endomorphismes suivants représentés dans la base B.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.24. Trigonaliser, lorsque c'est possible, les matrices suivantes dans $M_3(\mathbb{R})$.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -2a+5 & 2 & 2 \\ a+10 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.25. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f_a est trigonalisable pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est diagonalisable.
3. Déterminer la décomposition de Jordan-Chevalley de f_a.

Exercice 2.26. Soient B une base de $\mathbb{R}^2$ et $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$M_B(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_B(f_2) = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_B(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de f_i pour chaque $i \in \{1,2,3\}$.
2. Pour $i \in \{1,2,3\}$ déterminer le nombre de sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ stables par f_i.
3. Déterminer les $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ ayant plus de 5 sous-espaces stables.

Exercice 2.27. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Déterminer la décomposition de Jordan-Chevalley de A.

Exercice 2.28. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $f^n = 0$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = n - 1$.

1. Montrer que E contient un sev stable par f de dimension k pour tout $0 \leq k \leq n$.
2. Soit V un sev de E stable par f de dimension $k \geq 1$. Montrer que $(f_V)^k = 0$ et que $\dim f(V) = k - 1$.
3. Montrer que E contient un unique sev stable par f de dimension k pour tout $0 \leq k \leq n$. (Procéder par induction sur k.)

2.4. **Théorème spectral.**

Exercice 2.29. Soient E un espace euclidien et f une isométrie de E.

1. Montrer que $\mathrm{Spec}(f) \subseteq \{\pm 1\}$.
2. Montrer que si f est diagonalisable alors $f^t = f$.

Exercice 2.30. Montrer qu'un endomorphisme symétrique et nilpotent d'un espace euclidien est nul.

Exercice 2.31. Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $f^t \circ f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f est symétrique.
2. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 2.32 (Rotations du plan)**.** Soit f une isométrie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

1. Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Lesquelles sont diagonalisables ? Lesquelles sont diagonalisables dans une base orthonormale ?
2. On suppose que $\det(f) = 1$. Montrer qu'il existe une base orthonormale B et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.33 (Rotations de l'espace)**.** Soit f une isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

1. Montrer qu'il existe un vecteur propre $u \in \mathbb{R}^3$ pour f et que $\mathrm{Spec}(f) \subseteq \{\pm 1\}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}u)^\perp$ est stable par f.
3. On suppose que $\det(f) = 1$. Montrer qu'il existe une base orthonormale B et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.34 (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique réel positif)**.** Soit E un espace euclidien. Soit $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E :
$$S^+(E) = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) \mid f = f^{\,t} \text{ et } \mathrm{Spec}(f) \subset \mathbb{R}_+\}.$$
Soit $f \in S^+(E)$.

1. Montrer qu'il existe $g \in S^+(E)$ tel que $g^2 = f$.
2. Montrer que $g \circ f = f \circ g$ et que g stabilise les sous-espaces propres de f.
3. Montrer qu'il existe un unique $g \in S^+(E)$ tel que $g^2 = f$.

Exercice 2.35 (Décomposition polaire)**.** Soient (E, φ) un espace euclidien et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques strictement positifs de E :
$$S^{++}(E) = \{g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) \mid g = g^{\,t} \text{ et } \mathrm{Spec}(g) \subset \mathbb{R}_+^\times\}.$$
Soit $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(E)$.

1. Montrer que $S^{++}(E) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(E)$ et que $f^{\,t} \circ f \in S^{++}(E)$.
2. Montrer qu'il existe un unique $g \in S^{++}(E)$ tel que $g^2 = f^{\,t} \circ f$ (cf. exercice 2.34).
3. Montrer que $f \circ g^{-1}$ est une isométrie.
4. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_\varphi(E) \times S^{++}(E) &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(E) \\ (h, g) &\longmapsto h \circ g \end{aligned}$$
est bijective.