ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Definition 0.1. Un endomorphisme $g \in \mathrm{End}_K(E)$ est nilpotent s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $g^m = \mathbf{0}$.

L'endomorphisme nul $\mathbf{0}$ est nilpotent avec $m = 1$. Noter que si g est nilpotent alors $\mathrm{Ker}(g) \neq \{0_E\}$. En effet, si $m \geq 1$ est un entier tel que $g^m = \mathbf{0}$, alors $\det(g^m) = \det(g)^m = \det(\mathbf{0}) = 0$, d'où $\det(g) = 0$.

Definition 0.2. Une matrice $N \in M_n(K)$ est nilpotente s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $N^m = 0_{M_n(K)}$.

Par exemple, les matrices suivantes sont nilpotentes :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $g \in \mathrm{End}_K(E)$ nilpotent.

Si $m \geq 1$ est un entier tel que $g^m = \mathbf{0}$, alors $g^{m+1} = \mathbf{0}$. Donc il existe un plus petit entier $s \geq 1$ tel que $g^s = \mathbf{0}$. Cet entier non nul

$$s \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Min}\{m \geq 1 \mid g^m = \mathbf{0}\}$$

est l'indice de nilpotence de g. On a donc $g^s = \mathbf{0}$ et $g^{s-1} \neq \mathbf{0}$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(g^s) = E$ et $\mathrm{Ker}(g^{s-1}) \neq E$. Noter que $s = 1$ si et seulement si $g = \mathbf{0}$.

De manière similaire, une matrice nilpotente a un indice de nilpotence. Dans l'exemple précédent, l'indice de nilpotence de N_1 est 2, celui de N_2 est 2, et celui de N_3 est 3.

Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$. Si $k \geq 1$ est un entier tel que $g^k(x) = 0_E$, alors $g^{k+1}(x) = 0_E$. Il existe donc un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $g^{s(x)}(x) = 0_E$, i.e.

$$s(x) \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Min}\{k \geq 1 \mid g^k(x) = 0_E\}.$$

On a $g^{s(x)}(x) = 0_E$ et $g^{s(x)-1}(x) \neq 0_E$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(g^{s(x)})$ et $x \notin \mathrm{Ker}(g^{s(x)-1})$. De plus, $s(x) = 1$ si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Noter que

$$s = \mathrm{Max}\{s(x)\,;\, x \in E \setminus \{0_E\}\}.$$

Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$ soit

$$C_g(x) \underset{\text{def}}{=} \langle g^k(x)\,;\, k \in \mathbb{N}\rangle$$

le sous-espace vectoriel de E engendré par $x, g(x), g^2(x), g^3(x), \ldots,$ appelé sous-espace cyclique associé à g et x. Comme $g^k(x) = 0_E$ pour $k \geq s(x)$, on a

$$C_g(x) = \langle x, g(x), \ldots, g^{s(x)-1}(x)\rangle.$$

Noter que $g(\langle x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x)\rangle) = \langle g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x)\rangle$, donc

$$g\big(C_g(x)\big) \subseteq C_g(x),$$

i.e. le sous-espace $C_g(x)$ de E est stable par g. Soit $g_{|C_g(x)}$ la restriction de g à $C_g(x)$. Alors $g_{|C_g(x)} \in \mathrm{End}_K(C_g(x))$ est nilpotent d'indice $s(x)$.

Lemma 0.3. *La suite* $(x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x))$ *est une base de* $C_g(x)$.

En particulier $\dim C_g(x) = s(x)$.

Proof. Comme $C_g(x) = \langle x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x)\rangle$ la suite $(x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_g(x)$ si et seulement si elle est libre. Supposons que $(x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x))$ n'est pas libre. Soient $a_0, a_1, \dots, a_{s(x)-1} \in K$ non tous nuls tels que

$$a_0 x + a_1 g(x) + \ldots + a_{s(x)-1} g^{s(x)-1}(x) = 0_E.$$

Soit $0 \le i \le s(x) - 1$ le plus petit indice tel que $a_i \neq 0$. Alors $a_j = 0$ pour $0 \le j \le i-1$, d'où

$$a_i g^i(x) + a_{i+1} g^{i+1}(x) + \ldots + a_{s(x)-1} g^{s(x)-1}(x) = 0_E.$$

En appliquant $g^{s(x)-1-i}$ à cette égalité on obtient $a_i g^{s(x)-1}(x) = 0_E$, puisque $g^k(x) = 0_E$ pour $k \ge s(x)$. Or $a_i \neq 0$ et $g^{s(x)-1}(x) \neq 0_E$, d'où une contradiction. Donc $(x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x))$ est libre. $\square$

Les matrices de $g_{|C_g(x)}$ dans les bases $(x, g(x), \dots, g^{s(x)-1}(x))$ et $(g^{s(x)-1}(x), \dots, g(x), x)$ de $C_g(x)$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{s(x)}(K).$$

Si $g = f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ avec $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et $\lambda \in K$, alors $f(C_g(x)) \subseteq C_g(x)$, et les matrices de $f_{|C_g(x)}$ dans ces deux bases sont respectivement

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{s(x)}(K).$$

Ces deux types de matrices s'appellent des matrices de Jordan en λ de taille $s(x)$.

Proposition 0.4. *Soit* $g \in \mathrm{End}_K(E)$ *nilpotent avec* $\dim \mathrm{Ker}(g) = t$. *Il existe* $x_1, \dots, x_t \in E$ *tels que*

$$E = \bigoplus_{1 \le i \le t} C_g(x_i).$$

Autrement dit, il existe $x_1, \ldots, x_t \in E$ tels que

$$\big(x_1, g(x_1), \ldots, g^{s(x_1)-1}(x_1), x_2, g(x_2), \ldots, g^{s(x_2)-1}(x_2), \ldots\ldots, x_t, g(x_t), \ldots, g^{s(x_t)-1}(x_t)\big)$$

est une base de E, puisque $(x_i, g(x_i), \ldots, g^{s(x_i)-1}(x_i))$ est une base de $C_g(x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq t$. Lorsque $g = f - \lambda \operatorname{Id}_E$ la matrice de f dans cette base est diagonale par blocs avec t blocs, chaque bloc étant une matrice de Jordan en λ de taille $s(x_i)$.

Proof. Par induction sur l'indice de nilpotence $s = \operatorname{Min}\{m \geq 1 \mid g^m = \mathbf{0}\}$ de g.

Si $s = 1$ alors $g = \mathbf{0}$, d'où $s(x) = 1$ pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$. Donc $t = n$ et n'importe quelle base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E convient.

Soit $s \geq 2$. Supposons que la proposition est vraie pour les endomorphismes nilpotents d'indice $s - 1$. On a $g(\operatorname{Im}(g)) \subseteq \operatorname{Im}(g)$, i.e. le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(g)$ est stable par g. De plus $g_{|\operatorname{Im}(g)} \in \operatorname{End}_K(\operatorname{Im}(g))$ est nilpotent d'indice $s-1$. En effet, comme $g^s = \mathbf{0}$, pour tout $y = g(x) \in \operatorname{Im}(g)$ on a $g^{s-1}(y) = g^{s-1}(g(x)) = g^s(x) = 0_E$, donc $(g_{|\operatorname{Im}(g)})^{s-1} = \mathbf{0}$, et comme $g^{s-1} \neq \mathbf{0}$, il existe $x \in E$ tel que $g^{s-1}(x) = g^{s-2}(g(x)) \neq 0_E$, donc $(g_{|\operatorname{Im}(g)})^{s-2} \neq \mathbf{0}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $y_1, \ldots, y_r \in \operatorname{Im}(g)$ tels que

$$\operatorname{Im}(g) = \bigoplus_{1 \leq j \leq r} C_g(y_j)\,,$$

c'est-à-dire tels que $(y_1, \ldots, g^{s_1-1}(y_1), \ldots, y_r, \ldots, g^{s_r-1}(y_r))$ est une base de $\operatorname{Im}(g)$, où $s_j = s(y_j) = \operatorname{Min}\{k \geq 1 \mid g^k(y_j) = 0_E\}$. Pour tout $1 \leq j \leq r$ soit $x_j \in E$ tel que $y_j = g(x_j)$. Alors $g^{s_j+1}(x_j) = g^{s_j}(y_j) = 0_E$ et $g^{s_j}(x_j) = g^{s_j-1}(y_j) \neq 0_E$, donc $s(x_j) = s_j + 1$. On a $g^{s_j}(x_j) \in \operatorname{Ker}(g)$ pour tout $1 \leq j \leq r$, et la suite $(g^{s_1}(x_1), \ldots, g^{s_r}(x_r)) = (g^{s_1-1}(y_1), \ldots, g^{s_r-1}(y_r))$ est libre puisque $(y_1, \ldots, g^{s_1-1}(y_1), \ldots, y_r, \ldots, g^{s_r-1}(y_r))$ l'est. Par le théorème de la base incomplète il existe $x_{r+1}, \ldots, x_t \in \operatorname{Ker}(g)$ tels que

$$\big(g^{s_1}(x_1), \ldots, g^{s_r}(x_r), x_{r+1}, \ldots, x_t\big)$$

est une base de $\operatorname{Ker}(g)$, où $t = \dim \operatorname{Ker}(g)$. De plus, l'image par g de la suite

$$\big(x_1, \ldots, g^{s_1-1}(x_1), \ldots, x_r, \ldots, g^{s_r-1}(x_r)\big),$$

à savoir $(y_1, \ldots, g^{s_1-1}(y_1), \ldots, y_r, \ldots, g^{s_r-1}(y_r))$, est une base de $\operatorname{Im}(g)$. La preuve du théorème du rang montre qu'alors $(x_1, \ldots, g^{s_1}(x_1), \ldots, x_r, \ldots, g^{s_r}(x_r), x_{r+1}, \ldots, x_t)$ est une base de E, c'est-à-dire

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq t} C_g(x_i).$$

□

Remark 0.5. Cette preuve montre également qu'à permutation près la suite d'entiers $(s(x_1), \ldots, s(x_t))$ est indépendante de la suite de vecteurs $(x_1, \ldots, x_t)$ de la proposition. Plus précisément, si $x_1, \ldots, x_t, x'_1, \ldots, x'_u \in E$ sont tels que

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq t} C_g(x_i) = \bigoplus_{1 \leq j \leq u} C_g(x'_j)\,,$$

alors $u = t = \dim \operatorname{Ker}(g)$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_t$ telle que $s(x'_j) = s(x_{\sigma(j)})$ pour tout $1 \leq j \leq t$. En particulier, lorsque $g = f - \lambda \operatorname{Id}_E$, dans toute représentation matricielle de f dans une base du type $(x_1, \ldots, g^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, x_t, \ldots, g^{s(x_t)-1}(x_t))$ le nombre de blocs de Jordan en λ ainsi que les tailles des blocs intervenant sont les mêmes.