GROUPES

February 11, 2020

Exercice 1. Soit G un groupe tel $x^2 = 1_G$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 2. Soit G un groupe. Montrer que si $x, y \in G$ sont conjugués alors $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(y)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Soient G un groupe, $x \in G$, et $m, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$. Montrer que si $x^n = x^m = 1_G$ alors $x = 1_G$.

Exercice 4. Soient G un groupe abélien et G_{tors} l'ensemble des éléments d'ordre fini de G.

1. Montrer que G_{tors} est un sous-groupe de G.
2. Déterminer $(\mathbb{R}^\times)_{\mathrm{tors}}$ et $(\mathbb{C}^\times)_{\mathrm{tors}}$.

Exercice 5. Montrer qu'un groupe d'ordre pair possède au moins un élément d'ordre 2.

Exercice 6. Soient G un groupe et $x, y \in G$ tels que $\mathrm{ord}(x) = n$ et $\mathrm{ord}(y) = m$.

1. Montrer que si $xy = yx$ et $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$ alors $\mathrm{ord}(xy) = nm$.
2. Montrer que si $xy = yx$ alors $\frac{\mathrm{ppcm}(n,m)}{\mathrm{pgcd}(n,m)} \mid \mathrm{ord}(xy) \mid \mathrm{ppcm}(n, m)$.
3. Donner un contre-exemple au point précédent lorsque x et y ne commutent pas.
4. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. En déduire que la chaîne de divisibilité ci-dessus peut être stricte et que les bornes peuvent être atteintes.

Exercice 7. Soient $\sigma, \tau \in S_n$ à supports disjoints. Montrer que $\mathrm{ord}(\sigma\tau) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{ord}(\sigma), \mathrm{ord}(\tau))$.

Exercice 8. Soient G un groupe, $x \in G$ d'ordre n, et $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Montrer que $\mathrm{ord}(x^k) = \frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$.
2. Montrer que $\langle x^k \rangle = \langle x \rangle$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, k) = 1$.

Exercice 9. Calculer l'ordre de chacun des éléments des groupes suivants : $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_5^\times$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_7^\times$, $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $GL_2(\mathbb{F}_2)$. Lequels de ces groupes sont cycliques ?

Exercice 10. Montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

Exercice 11. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice 12. Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre d pour tout diviseur d de n.

Exercice 13. Déterminer tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 14. Soit p premier. Trouver un sous-groupe d'ordre $p^{n(n-1)/2}$ dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 15. Déterminer tous les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 16. Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Exercice 17. Soit G un groupe. Montrer que l'application $G \to G$, $x \mapsto x^2$ est un morphisme de groupe si et seulement si G est abélien.

Exercice 18. Ces groupes sont-ils isomorphes ? $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^\times$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$; $\mathbb{R}^\times$ et $\mathbb{C}^\times$; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^\times$.

Exercice 19. Soit $n \geq 2$ entier. Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{grp}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 20. Soit G un groupe. Montrer que $\mathrm{Int}_{\mathrm{grp}}(G) \lhd \mathrm{Aut}_{\mathrm{grp}}(G)$.

Exercice 21. Soient G et G' deux groupes finis dont les ordres sont premiers entre eux. Déterminer tous les morphismes de groupe $G \to G'$.

Exercice 22. Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G est normal dans G.

Exercice 23. Soit G un groupe d'ordre 4. Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 24. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme injectif $S_3 \hookrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exercice 25. Déterminer tous les morphismes de S_3 vers les groupes suivants : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 26. Déterminer tous les morphismes de groupe $\mathbb{F}_7^\times \to S_3$.

Exercice 27. Montrer qu'un groupe G est cyclique si et seulement si il existe un morphisme surjectif $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$.

Exercice 28. Soient $f : G \to G'$ un morphisme de groupe et $x \in G$ d'ordre fini.
1. Montrer que $\mathrm{ord}(f(x)) \mid \mathrm{ord}(x)$.
2. Montrer que $\mathrm{ord}(f(x)) = \mathrm{ord}(x)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \langle x \rangle = \{1_G\}$.

Exercice 29. Soient G un groupe et $H \subseteq K$ des sous-groupes de G tels que $H \lhd G$.
1. Montrer que $H \lhd K$ et que K/H est un sous-groupe de G/H.
2. Montrer que $K/H \lhd G/H$ si et seulement si $K \lhd G$.

Exercice 30. Montrer que $Z(S_n)$ est trivial pour tout $n \geq 3$.

Exercice 31. Soit G un groupe. Montrer que si $\mathrm{Aut}_{\mathrm{grp}}(G)$ est cyclique alors G est abélien. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 32. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G tel que $H \subseteq Z(G)$.
1. Montrer que $H \lhd G$.
2. Montrer que si G/H est cyclique alors G est abélien.

Exercice 33. Soient $m, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $n \mid m$.
1. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\big/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 34. Soit G un groupe non trivial fini abélien simple. Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un p premier.

Exercice 35. Soient G un groupe fini, $H \lhd G$ et $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ le morphisme de projection. Soit $\Gamma \lhd G/H$. Montrer que $\pi^{-1}(\Gamma) \lhd G$ et que $|\pi^{-1}(\Gamma)| = |\Gamma|\,|H|$.

Exercice 36. Soient G un groupe et $H \lhd G$ tel que $\mathrm{pgcd}(|H|, |G/H|) = 1$. Montrer que H est l'unique sous-groupe d'ordre $|H|$ de G.

Exercice 37. Soient G un groupe et $H \lhd G$ tel que $|G/H| = n$.

1. Montrer que $x^n \in H$ pour tout $x \in G$. Est-ce vrai si H n'est pas normal dans G ?
2. Montrer que $\mathbb{C}^\times$ ne possède pas de sous-groupe propre d'indice fini.

Exercice 38.

1. Montrer que tous les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont d'ordre fini. Le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est-il cyclique ?
2. Soit $n \geq 1$ entier. Montrer que le morphisme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto nx$ est surjectif et déterminer son noyau.
3. Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d'ordre n pour tout $n \geq 1$.
4. Trouver un sous-groupe strict de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'ordre infini.

Exercice 39. Soit p un nombre premier impair. Combien y a-t-il de carrés dans $\mathbb{F}_p$?

Exercice 40. Montrer que $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \mathrm{ppcm}(m, n)\mathbb{Z}$ et $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(m, n)\mathbb{Z}$.

Exercice 41. Soient $\sigma, \tau \in S_3$ tels que $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$ et $\mathrm{ord}(\tau) = 3$. Montrer que $\langle \sigma, \tau \rangle = S_3$.

Exercice 42. Soient G un groupe et $x, y \in G$ d'ordre fini. Le groupe $\langle x, y \rangle$ est-il fini ?

Exercice 43. Soient G un groupe et $x, y \in G$.

1. On suppose que y est d'ordre fini. Montrer que $\langle x \rangle \lhd \langle x, y \rangle$ ssi $yxy^{-1} \in \langle x \rangle$.
2. Soient $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $y = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{Q})$. Vérifier que $yxy^{-1} \in \langle x \rangle$. A-t-on $\langle x \rangle \lhd \langle x, y \rangle$?
3. Montrer que $\langle x \rangle \lhd \langle x, y \rangle$ ssi $yxy^{-1} \in \langle x \rangle$ et $y^{-1}xy \in \langle x \rangle$.

Exercice 44. Soient $\sigma, \tau \in S_5$ avec $\sigma = (12)$ et $\tau = (123)(45)$. Déterminer l'ordre de $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

Exercice 45. Déterminer $D(S_3)$. Quels sont les morphismes $S_3 \to \mathbb{C}^\times$?

Exercice 46. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Montrer que si $D(G) \subseteq H$ alors $H \lhd G$.

Exercice 47.

1. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de D_4.
2. Déterminer le treillis des sous-groupes de D_4. Lesquels sont normaux ?
3. Déterminer $Z(D_4)$ et $D(D_4)$.

Exercice 48.

1. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de Q_8. A-t-on $Q_8 \simeq D_4$?
2. Déterminer le treillis des sous-groupes de Q_8. Lesquels sont normaux ?
3. Déterminer $Z(Q_8)$ et $D(Q_8)$.

Exercice 49. Déterminer $Z(D_5)$ et $D(D_5)$.

Exercice 50. Soient G un groupe et H, K des sous-groupes de G. Montrer que l'application

$$H \times K \longrightarrow HK$$
$$(h, k) \longmapsto hk$$

est un isomorphisme de groupe si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $\forall\, h \in H, \forall\, k \in K, hk = kh$
(2) $H \cap K = \{1_G\}$.

Exercice 51. Montrer que si n est pair D_n contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 52. Montrer que $\mathbb{R}^\times \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{R}_+^\times$ et que $\mathbb{C}^\times \simeq S^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}_+^\times$, où $S^1(\mathbb{C})$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Exercice 53. Soit G un groupe abélien. Pour $n \geq 1$ entier, soit $G[n] = \{x \in G \mid x^n = 1_G\}$.

1. Montrer que $G[n]$ est un sous-groupe de G.
2. Soient $n, m \geq 1$ tels que $|G| = nm$ et $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$. Montrer que $G \simeq G[n] \times G[m]$.

Exercice 54. Soient G un groupe fini et H, K des sous-groupes de G avec $|H| = n$ et $|K| = m$. On suppose que $H \lhd HK$, $K \lhd HK$, et que $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$.

1. Montrer que $HK \simeq H \times K$.
2. Montrer que si de plus H et K sont cycliques, alors $HK \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$.

Exercice 55. Soient G un groupe, $x, y \in G$, et H, K des sous-groupes de G.

1. Montrer que $Z_G(x)$ est un sous-groupe de G contenant $\langle x \rangle$. A-t-on $H \subseteq Z_G(H)$?
2. Montrer que $Z_G(xyx^{-1}) = xZ_G(y)x^{-1}$.
3. Montrer que si $H \lhd G$ alors $Z_G(H) \lhd G$.
4. Montrer que $Z_G(HK) = Z_G(H) \cap Z_G(K)$.

Exercice 56. Soient G un groupe, $x \in G$, et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G et que $H \lhd N_G(H)$. A-t-on $N_G(H) \lhd G$?
2. Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal.
3. Montrer que $N_G(xHx^{-1}) = xN_G(H)x^{-1}$.
4. Montrer que $Z_G(H) \lhd N_G(H)$.

Exercice 57. Déterminer $N_{D_n}(\langle \rho_n \rangle)$ et $N_{D_n}(\langle \sigma \rangle)$.

Exercice 58. Soient $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{F}_3)$ avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont les relations $\beta^{-1} = -\beta^3$ et $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^3$. Soit $G = \langle \alpha, \beta \rangle$.

1. Déterminer l'ordre de G.
2. Déterminer $Z_G(\beta)$ et $Z(G)$.
3. Déterminer $D(G)$.

Exercice 59. Soit $G = \langle I, J, D \rangle$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\langle I, J \rangle \lhd G$ et déterminer l'ordre de G.
2. Montrer que $\langle I, D \rangle \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Déterminer $Z_G(D)$ et $Z(G)$.
4. Déterminer $D(G)$. Existe-t-il un morphisme surjectif $G \twoheadrightarrow \mathbb{F}_5^\times$?