ANNEAUX COMMUTATIFS

March 5, 2020

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif. Montrer que $A[X]$ est intègre ssi A est intègre.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif.

1. Soit $a \in A$. Montrer que l'application $A \to A$, $x \mapsto ax$ est un morphisme de groupe.
2. Montrer que si A est intègre et fini alors A est un corps.

Exercice 3. Montrer que $A = \{\frac{a}{2^n}\,;\, a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et déterminer $A^\times$.

Exercice 4. Montrer que $B = \{\frac{a}{b}\,;\, a, b \in \mathbb{Z},\, \mathrm{pgcd}(a,b) = 1 \text{ et } b \notin 2\mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et déterminer $B^\times$.

Exercice 5. Soient B un anneau commutatif, $A \subseteq B$ un sous-anneau, et $b \in B$. Soit

$$A[b] = \{P(b)\,;\, P(X) \in A[X]\}.$$

Montrer que $A[b]$ est le plus petit sous-anneau de B contenant A et b.

Exercice 6 (Entiers de Gauss)**.** Soit $\mathbb{Z}[i]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\,;\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i]^\times = \langle i \rangle$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi\,;\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.

Exercice 7. Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,] = \{a + b\sqrt{2}\,;\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]^\times$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]^\times$ est infini.

Exercice 8. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}\,] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\,;\, a, b, c \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif non nul. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau $\mathbb{Z} \to A$.

Exercice 10. Déterminer tous les morphismes d'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,] \to \mathbb{C}$.

Exercice 11. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}\,]$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 12. Soient A, B des anneaux commutatifs intègres et $f : A[X] \to B[X]$ un morphisme d'anneau.

1. Montrer que f induit un morphisme de groupe $f^\times : A^\times \to B^\times$.
2. Montrer que si f est un isomorphisme alors $f^\times$ l'est aussi.
3. Montrer que les anneaux $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme d'anneau.

1. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est l'identité.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 0$. Montrer que $f(x) \geq 0$.
3. Montrer que f est croissante.
4. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 14. Soit A un anneau commutatif non nul. Montrer que A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont (0) et A.

Exercice 15. Soient K un corps et A un anneau commutatif non nul. Montrer que tout morphisme d'anneau $K \to A$ est injectif.

Exercice 16. Soient K, L des corps. Déterminer les idéaux de $K \times L$.

Exercice 17. Soient A un anneau commutatif intègre et $a, b \in A$. Montrer que $(a) = (b)$ si et seulement si il existe $u \in A^\times$ tel que $b = ua$.

Exercice 18. Soit A un anneau commutatif intègre n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux.

1. Soit $a \in A$ non nul. Montrer qu'il existe $1 \leq n < m$ entiers tels que $(a^n) = (a^m)$.
2. Montrer que A est un corps.

Exercice 19. Soient A un anneau commutatif et I, J des idéaux de A. Soit

$$IJ = \{ \sum_{1 \leq i \leq n} c_i d_i \ ; \ n \geq 1, \, c_i \in I, \, d_i \in J \}.$$

1. Montrer que IJ est un idéal de A et déterminer $(a)(b)$ pour $a, b \in A$.
2. Montrer que $IJ \subseteq I \cap J$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$.

Exercice 20. Soient K un corps et $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) \in M_2(K), \, x, y \in K \right\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau commutatif de $M_2(K)$.
2. Déterminer $A^\times$. L'anneau A est-il intègre ?
3. Montrer que $A \setminus A^\times$ est un idéal de A.
4. Déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 21. Existe-t-il une structure d'anneau sur le groupe abélien $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ telle que la projection $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneau ?

Exercice 22. Soient K un corps et $P(X) \in K[X]$ de degré $n \geq 1$. Montrer que $K[X]/(P)$ est un K-espace vectoriel et que $(1 \bmod (P), X \bmod (P), \ldots, X^{n-1} \bmod (P))$ en est une base.

Exercice 23. Soit A un anneau commutatif intègre. Montrer que A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{F}_p$ pour un p premier.

Exercice 24. Montrer que l'idéal (X) de $\mathbb{Z}[X]$ est premier non maximal.

Exercice 25. Soient A un anneau commutatif et $a \in A$. Montrer que $a \in A^\times$ si et seulement si a n'appartient à aucun idéal maximal de A.

Exercice 26. Soient A un anneau commutatif intègre et $a, b \in A$ avec $a \neq 0$. On suppose que (a) est premier et que $(a) \subseteq (b)$. Montrer que $(a) = (b)$ ou $(b) = A$.

Exercice 27. Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A.

1. Montrer que l'application $J \mapsto J/I$ est une bijection croissante entre les idéaux de A contenant I et les idéaux de A/I.
2. Montrer que cette bijection préserve les idéaux premiers et les idéaux maximaux.

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Déterminer les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 29. Soient $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs et J un idéal de B.

1. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.
2. Montrer que si J est premier alors $f^{-1}(J)$ est premier.
3. On suppose f surjectif. Montrer que si J est maximal alors $f^{-1}(J)$ est maximal.

Exercice 30. Soit $A = C([0,1], \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $S \subseteq [0,1]$ soit $I(S) = \{f \in A \mid \forall\, x \in S, f(x) = 0\}$.

1. Montrer que $I(S)$ est un idéal de A.
2. Soient $I = I([0, \frac{1}{3}])$ et $J = I([\frac{2}{3}, 1])$. Déterminer $I + J$.
3. L'idéal $I([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$ est-il premier ?
4. Soit $a \in [0,1]$. Montrer que l'idéal $I(\{a\})$ est maximal.

Exercice 31. Les anneaux $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 32. Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 3X + 2) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Exercice 33 (Sun Zi, IIIème siècle)**.** Soient des objets en nombre inconnu. Si on les range par 3 il en reste 2. Si on les range par 5, il en reste 3 et si on les range par 7, il en reste 2. Combien a-t-on d'objets ?

Exercice 34 (Théorème d'Euler)**.**

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}_0$ tels que $\operatorname{pgcd}(a, n) = 1$. Montrer que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que 165 divise $56^{80} - 1$.

Exercice 35. Soient $n, m \geq 1$ entiers. Montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ ssi $\operatorname{pgcd}(m, n) = 1$.

Exercice 36. Soit $n \geq 1$ entier. Montrer que $\varphi(n) = n - 1$ si et seulement si n est premier.

Exercice 37.

1. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $\operatorname{pgcd}(n, 10) = 1$. Montrer qu'il existe un multiple de n dont l'écriture décimale ne comporte que des 9.
2. Quel est le plus petit entier naturel divisible par 7 dont l'écriture décimale ne comporte que des 9 ?

Exercice 38. Montrer que $1 + i$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 39. Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 40 (Morphisme de Frobenius)**.** Soient p un nombre premier, A un anneau commutatif intègre tel que $p = 0$ dans A, et $\sigma : A \to A$ l'application $a \mapsto a^p$.

1. Montrer que σ est un endomorphisme d'anneau injectif.
2. Soit $A = \mathbb{F}_p$. Montrer que $\sigma = \mathrm{Id}_A$.
3. Montrer que $F = \{a \in A \mid \sigma(a) = a\}$ est un sous-anneau de A isomorphe à $\mathbb{F}_p$.

Exercice 41. Montrer que l'idéal $(2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice 42. Soit K un corps. Montrer que l'idéal (X, Y) de $K[X, Y]$ n'est pas principal.

Exercice 43. Soit K un corps.

1. Montrer que les K-espaces vectoriels $K[X]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.
2. Montrer que les anneaux $K[X]$ et $K[X, Y]$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 44 (Lemme d'Euclide)**.** Soient A un anneau principal et $a, b \in A$. Montrer que si c est irréductible dans A et $c \mid ab$, alors $c \mid a$ ou $c \mid b$.

Exercice 45. Soit A un anneau commutatif tel que $A[X]$ est principal.

1. Montrer que X est irréductible dans $A[X]$.
2. Montrer que A est un corps.

Exercice 46. Soit $P(X) = X^4 - 6X^3 + 18X^2 - 12X \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(P) \simeq \mathbb{Q} \times K$ où K est un corps.

Exercice 47. Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(X^8 - 1)$ est isomorphe au produit de quatre corps.

Exercice 48. Montrer que $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$ est un corps à huit éléments.

Exercice 49. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $3x - 5y = 13$.

Exercice 50. Factoriser les polynômes suivants dans les anneaux indiqués.

1. $X^6 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{F}_3[X]$ et $\mathbb{F}_2[X]$.
2. $X^6 + X^5 - X - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{F}_5[X]$.
3. $7X^5 - 12X^2 + 36X - 18$ dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{F}_3[X]$ et $\mathbb{F}_7[X]$.

Exercice 51. Soit p un nombre premier. Factoriser $X^p - 1$ et $X^p - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 52. Soit A un anneau principal et $a, b \in A$ non nuls. Montrer qu'il existe $x, y \in A$ tels que $ax + by = \text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 53. Soit A un anneau principal et $a, b \in A$ non nuls.

1. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ si et seulement si $\text{pgcd}(a + b, ab) = 1$.
2. A-t-on $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a + b, ab)$?