Algèbre linéaire et géométrie I
Janvier 2017

Documents interdits.

Exercice 1. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \langle\, (1,0,1), (0,1,0) \,\rangle \quad \text{et} \quad W = \langle\, (1,0,-1) \,\rangle.$$

1. Montrer que $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
3. Soit p la projection sur V parallèlement à W. Calculer $p(1,1,1)$ et $p(2,1,0)$.

Exercice 2. Soient les applications linéaires

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x-y,\, 2x+y,\, x+y) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-y+z,\, x+z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective et que g est surjective.
2. Montrer que g n'est pas injective et que f n'est pas surjective.
3. Montrer que $g \circ f$ est bijective.
4. L'application $f \circ g$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire. Soit

$$\mathrm{F}(f) = \{v \in E \mid f(v) = v\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{F}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{F}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{F}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $\mathrm{F}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que $E = \mathrm{F}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $f \circ f = f$.