Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2019, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$ et $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tels que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $C = (g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et déterminer $M_C(f)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f \circ f - \mathrm{Id})$.
3. Soit $V = g(\langle e_2 + e_3\, , e_1 + e_4 \rangle)$. Déterminer les entiers $n \geq 1$ pour lesquels il existe une application linéaire bijective $V + \mathrm{Ker}(f) \to \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathrm{End}_K(E)$, et V un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que $\dim f(V) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f) \cap V$ et $\dim f^{-1}(V) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \cap V$.

1. Montrer que $\dim f(V) = \dim f^{-1}(V)$ ssi $\dim(\mathrm{Im}(f) + V) = \dim E + \dim \mathrm{Ker}(f) \cap V$.
2. Montrer que $\dim f(V) = \dim f^{-1}(V)$ ssi $\mathrm{Im}(f) + V = E$ et $\mathrm{Ker}(f) \cap V = \{0_E\}$.
3. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans une base B de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Existe-t-il un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim f(V) = \dim f^{-1}(V)$?

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $g \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $E = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$, avec $\dim \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) = r$ et $\dim \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}) = s$. Soit

$$C(g) = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid f \circ g = g \circ f\}.$$

1. Montrer que g est bijectif.
2. Montrer que $f \in C(g)$ ssi $f(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})) \subseteq \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ et $f(\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})) \subseteq \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$.
3. Déterminer $\dim C(g)$ en fonction de r et de s.
4. Soit $F = \{g \circ f \circ g^{-1} - f \;;\; f \in \mathrm{End}_K(E)\}$. Déterminer $\dim F$ en fonction de r et de s.