Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2018, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, -1, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\langle v_1, v_2 \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
3. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que $(v_1, v_2, f(v_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $f(v_3) \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.
4. Soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est
$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $(v_1, v_2, f_a(v_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $B = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soient $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tels que
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
Soient $v_1 = 2e_1 + e_2$ et $v_2 = 2e_1 - e_2$.

1. Montrer que $C = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $M_C(f)$ et $M_C(g)$.
2. Montrer que f et g sont des projections en précisant la somme directe associée.
3. Déterminer les $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg$ est bijective.
4. Déterminer les $a, b \in \mathbb{R}$ tels l'image de toute droite de $\mathbb{R}^2$ par $af + bg$ est une droite.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
2. Donner un exemple de $f \in \mathrm{End}_K(E)$ ni nul ni bijectif tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Donner un exemple de $f \in \mathrm{End}_K(E)$ où E n'est pas somme directe de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.