February 3, 2017

ALGÈBRE LINÉAIRE - EXERCICES 3

Contents

1. Structure des applications linéaires

Exercice 1.1. Soient E un K-espace vectoriel et $f, g \in \mathrm{End}_K(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $n \geq 1$ entier $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (n fois). Soit $u \in E$ tel que $f(u) = g(u)$. Montrer que $f^n(u) = g^n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Soient $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à W et $q \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur W parallèlement à V. Montrer que (p, q) est libre.

Exercice 1.3. Soient E un K-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ f - f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 1.4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $-\frac{1}{2}(f - \mathrm{Id}_E) + \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) = (f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = \mathbf{0}$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 1.5 (Projections)**.** Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Soient p la projection sur V parallèlement à W et q la projection sur W parallèlement à V.

1. Montrer que $p \circ q = q \circ p = \mathbf{0}$ et $p + q = \mathrm{Id}_E$.
2. Soient $a, b \in K$ et $n \geq 1$ entier. Montrer que $(ap + bq)^n = a^n p + b^n q$.

Exercice 1.6 (Symétries)**.** Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Soit $s : E \to E$ la symétrie par rapport à V parallèlement à W, donnée par $v + w \mapsto v - w$ pour tous $v \in V$, $w \in W$.

1. Montrer que s est une application linéaire et que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Soit $t : E \to E$, $v + w \mapsto -v + w$, la symétrie par rapport à W parallèlement à V.

2. Montrer que $s \circ t = t \circ s = -\mathrm{Id}_E$ et $s + t = \mathbf{0}$.
3. Calculer $(s - t)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1.7. Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ (cf. exercice 1.4).

Exercice 1.8. Soient E un K-espace vectoriel et U, V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W = U \oplus W$. Soient $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur U parallèlement à V et $s \in \mathrm{End}_K(E)$ la symétrie par rapport à U parallèlement à W. Montrer que $p \circ s = s \circ p$ si et seulement si $V = W$.

Exercice 1.9. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f, g : E \to F$ des applications linéaires.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f + g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
3. Déterminer les quatre espaces vectoriels ci-dessus lorsque f est bijective et $g = -f$.
4. Montrer que si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_F\}$ alors $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f + g)$.
5. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$ alors $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 1.10. Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f, g : E \to F$ des applications linéaires.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f + g)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f + g)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 1.11. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g : E \to E$ des applications linéaires telles que $f + g$ est bijective et $f \circ g = \mathbf{0}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $\dim E \geq \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que $\dim E = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 1.12. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $k \geq 1$ entier $f^k = f \circ \ldots \circ f$ (k fois).

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^k) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(f^k)$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f^{k+1}) - \dim \mathrm{Ker}(f^k) = \dim \mathrm{Im}(f^k) - \dim \mathrm{Im}(f^{k+1})$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi_k : \mathrm{Im}(f^k) &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi_k) = \mathrm{Im}(f^k) \cap \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(\phi_k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$.
4. Montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}(f^{k+1}) - \dim \mathrm{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.
6. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^n) \oplus \mathrm{Im}(f^n)$.

Exercice 1.13. Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E \geq 2$ et $\dim F \geq 1$. Soient $u, v \in E$, et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Hom}_K(E, F) &\longrightarrow F \times F \\ f &\longmapsto \big(f(u), f(v)\big). \end{aligned}$$

Pour $a, b \in K$ soit l'application linéaire $\psi_{a,b} : F \times F \to F$, $(w_1, w_2) \mapsto aw_1 + bw_2$.

1. Montrer que l'application φ est linéaire.
2. Montrer que si $au + bv = 0_E$ alors $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_{a,b})$.
3. Soit $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer que $\psi_{a,b}$ est surjective et déterminer $\dim \mathrm{Ker}(\psi_{a,b})$.
4. Montrer que φ est surjective si et seulement si (u, v) est libre.
5. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 1.14. Soient E un K-espace vectoriel et V, W des sous-espaces vectoriels de E. Soit $F = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid f(V) \subseteq V \text{ et } f(W) \subseteq W\}$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \rho : F &\longrightarrow \mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(W) \\ f &\longmapsto (f_{|V}, f_{|W}). \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_K(E)$.
2. Montrer que ρ est linéaire.
3. On suppose que $V + W = E$. Montrer que ρ est injective.
4. On suppose que $E = V \oplus W$. Montrer que ρ est surjective.
5. On suppose que $E = V \oplus W$. Montrer que $\dim F = (\dim V)^2 + (\dim W)^2$.

Exercice 1.15. Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E. Soit l'application

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{Hom}_K(E, F) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, F) \\ f &\longmapsto f_{|V}. \end{aligned}$$

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\rho) = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid V \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}$.

Soient W un sous-espace vectoriel de E tel que $E = V \oplus W$ et p la projection sur V parallèlement à W. Pour tout $g \in \mathrm{Hom}_K(V, F)$, soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varepsilon(g) : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto g(p(u)). \end{aligned}$$

3. Montrer que $\varepsilon : \mathrm{Hom}_K(V, F) \to \mathrm{Hom}_K(E, F)$, $g \mapsto \varepsilon(g)$ est linéaire et injective.
4. Montrer que $\rho \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_K(V,F)}$.
5. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(\rho) = (\dim E - \dim V) \dim F$.
6. Montrer que $\psi : \mathrm{Ker}(\rho) \to \mathrm{Hom}_K(W, F)$, $f \mapsto f_{|W}$ est un isomorphisme linéaire.

Exercice 1.16. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour un sous-espace vectoriel V de E on pose

$$N(V) \underset{\text{def}}{=} \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid \forall\, v \in V,\ f(v) = 0_E\}.$$

Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $N(V)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_K(E)$.
2. Montrer que si $V \subseteq W$ alors $N(W) \subseteq N(V)$.
3. Montrer que $N(V) + N(W) \subseteq N(V \cap W)$.
4. Montrer que $N(V) \cap N(W) = N(V + W)$.
5. Soient $(v_1, \ldots, v_r)$ une base de V et $E^r = E \times \ldots \times E$ (r fois). Soit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{End}_K(E) &\longrightarrow E^r \\ f &\longmapsto (f(v_1), \ldots, f(v_r)). \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est linéaire et surjective.
6. Montrer que $\dim N(V) = n(n - \dim V)$.
7. Montrer que $N(V) = \mathrm{End}_K(E)$ ssi $V = \{0_E\}$, et $N(V) = \{\mathbf{0}\}$ ssi $V = E$.
8. Montrer que $N(V) + N(W) = N(V \cap W)$.
9. Montrer que $E = V \oplus W$ si et seulement si $\mathrm{End}_K(E) = N(V) \oplus N(W)$.

2. Représentations matricielles

Exercice 2.1. Soient les applications linéaires

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, -2x - y, 2x + 2y + z) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (-x - 2y - 2z, y + 2z, -z). \end{aligned}$$

1. Déterminer les matrices de f et de g dans la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
2. Montrer que $f \circ g = g \circ f$, $f \circ f = g \circ g$, et que f et g sont bijectives.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - g) \oplus \mathrm{Ker}(f + g)$.

Exercice 2.2. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - y - 3z, -2x + 3y + 6z,\ x - y - 2z). \end{aligned}$$

1. Déterminer $M_B(f)$.
2. Montrer que $C = (2e_1 - e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que
$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \mathbf{0}$.

Exercice 2.3. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + 2z,\ x + 2y + 3z,\ x + 2y + 4z). \end{aligned}$$

1. Déterminer $M_B(f)$.
2. Montrer que $C = (-e_1 - e_2 + e_3, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $M_C(f)$.
4. Montrer que $M_B(f)P_B^C = P_B^C M_B(f)$.

Exercice 2.4. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 2z,\ y + 3z, -2x + 2y). \end{aligned}$$

1. Déterminer $M_B(f)$.

2. Montrer que $C = ((1,1,0),(2,3,-2),(2,3,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $M_C(f)$.
4. Montrer que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbf{0}$.

Exercice 2.5. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (7x+4y-16z,\ 3x+y-7z,\ 4x+2y-9z)\,. \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base B.
2. Montrer que $C = (e_1 + 2e_2 + e_3, 2e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base C.
4. Montrer que $f^3 + f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = \mathbf{0}$.
5. Calculer M^{4n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.6. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soient $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (-1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$, et $C = (v_1, v_2, v_3)$.

1. Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de g dans la base C.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et une base de $\mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
5. Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur $\langle v_1, v_2 \rangle$ parallèlement à $\langle v_3 \rangle$. Pour $n \geq 1$ entier soit $g^n = g \circ \ldots \circ g$ (n fois). Montrer que $g^n = 2^{n-1} g$ si n est impair et $g^n = 2^n p$ si n est pair.

Exercice 2.7. Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires données pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} & f(x,y,z) = (y-z, -x+z,\ x-y) \\ \text{et} \quad & g(x,y,z) = (-y-2z,\ x-z,\ 2x+y). \end{aligned}$$

Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,2,-1)$, $v_3 = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$, et $C = (v_1, v_2, v_3)$.

1. Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices de f et de g dans la base C.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
4. Déterminer les matrices de $f \circ g$ et de $g \circ f$ dans la base C.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2.8. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. Montrer que $f(x) = ax$ si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$.
2. Soient $a \neq b$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer qu'il existe une base C de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que $f^3 = f$.

Exercice 2.9. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Soient

$$v_1 = e_1 - 3e_3\,, \quad v_2 = e_2 + e_3\,, \quad v_3 = e_1 + 2e_2\,.$$

1. Montrer que $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \mapsto a_1v_1 - a_2v_2 + a_3v_3$, avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Déterminer la matrice M de f dans la base B.
3. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur $\langle v_1, v_3\rangle$ parallèlement à $\langle v_2\rangle$. Déterminer la matrice N de g dans la base B.
4. Calculer N^n et M^n pour tout $n \geq 1$.
5. Calculer $(MN)^n$ et $(NM)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.10. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Soient les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soient les vecteurs $v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (-1,2,0) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \langle v_1\rangle \oplus \langle v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \oplus \langle v_3\rangle$.
2. Soient p_1 la projection sur $\langle v_1\rangle$ parallèlement à $\langle v_2, v_3\rangle$ et p_2 la projection sur $\langle v_1, v_2\rangle$ parallèlement à $\langle v_3\rangle$. Montrer que $A_1 = M_B(p_1)$ et $A_2 = M_B(p_2)$.
3. Montrer que $A_1A_2 = A_2A_1 = A_1$.
4. Soit $n \geq 1$ entier. Montrer que $A_1^n = A_1$ et $A_2^n = A_2$.
5. Montrer que $(A_1 - A_2)^n = (-1)^{n+1}(A_1 - A_2)$ et $(A_1 + A_2)^n = (2^n - 1)A_1 + A_2$.

Exercice 2.11. Soient E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (u, v, w)$ une base de E. Soient $V = \langle u, v\rangle$, $W = \langle w\rangle$, $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à W et $s \in \mathrm{End}_K(E)$ la symétrie par rapport à V parallèlement à W.

1. Déterminer $M_B(p)$ et $M_B(s)$.
2. Montrer que $C = (u + v, u + w, v + w)$ est une base de E.
3. Déterminer $M_C(p)$ et $M_C(s)$.
4. Calculer $M_C(p)^n$ et $M_C(s)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.12. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Soient $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$, $w = e_1 - e_2 + e_3$ et $W = \langle w\rangle$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $v \in V$ et un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u = v + \lambda w$.
   (b) Montrer que $\lambda = \frac{1}{2}(2x + y + z)$.
3. Soit $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ la projection sur V parallèlement à W. Montrer que
$$M_B(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Soit $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport à V parallèlement à W. Montrer que $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et déterminer $M_B(s)$.

Exercice 2.13. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soient $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2$, $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, et $W = \langle v_3 \rangle$.

1. Montrer que $C = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Soient $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ la projection sur V parallèlement à W et $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport à V parallèlement à W.

2. Déterminer $M_C(p)$ et $M_C(s)$.
3. Calculer $(M_C(s)M_C(p))^n$ et $(M_C(p)M_C(s))^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.14. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et
$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Soit $N = M - \mathbf{1}_3$. Calculer N^2 et N^3.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.15. Soit K un corps. Pour $a \in K$ soit la matrice
$$U_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(K).$$

1. Montrer que $U_a \in GL_4(K)$ pour tout $a \in K$.
2. Montrer que $U = \{U_a\,;\, a \in K\}$ est un sous-groupe de $GL_4(K)$. Est-il normal ?
3. Montrer que l'application $K \to U$, $a \mapsto U_a$ est un isomorphisme de groupe.

Exercice 2.16. Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3. Pour $a, b \in K$ soit $f_{a,b} \in \mathrm{End}_K(E)$ telle qu'il existe une base B de E telle que
$$M_B(f_{a,b}) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f_{a,b})$ et $\dim \mathrm{Im}(f_{a,b})$.

Exercice 2.17. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ telle qu'il existe une base B de E telle que $M_B(f) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{i,j} = 0$ pour $i \geq j$. Montrer que $f^n = \mathbf{0}$.

Exercice 2.18. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. Soit $g \in \mathrm{Aut}_K(E)$.

1. Montrer que $g(B) = (g(v_1), \dots, g(v_n))$ est une base de E.
2. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $M_{g(B)}(f) = M_B(f)$.

Exercice 2.19. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Soient $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à W et $s \in \mathrm{End}_K(E)$ la symétrie par rapport à V parallèlement à W. Soit $B = (v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n)$ une base de E telle que $v_1, \dots, v_r \in V$ et $w_{r+1}, \dots, w_n \in W$.

1. Montrer que $s(B) = (s(v_1), \dots, s(v_r), s(w_{r+1}), \dots, s(w_n))$ est une base de E.
2. Montrer que $M_{s(B)}(p) = M_B(p)$.

Exercice 2.20. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (cf. exercice 1.4). Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est l'une des suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.21 (Matrices élémentaires)**.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour $1 \leq \ell, m \leq n$ soient les matrices élémentaires

$$E_{\ell,m} = (\varepsilon_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \quad \text{avec } \varepsilon_{i,j} = 0 \text{ si } (i,j) \neq (\ell, m) \text{ et } \varepsilon_{\ell,m} = 1.$$

Montrer que $\{E_{\ell,m} \,;\, 1 \leq \ell, m \leq n\}$ est une base de $M_n(K)$.

Exercice 2.22. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de E de dimension $r \geq 1$. Soient

$$N(V) = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid V \subseteq \mathrm{Ker}(f)\} \quad \text{et}$$

$$F = \{(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \mid a_{i,j} = 0 \text{ pour tous } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq r\}.$$

1. Montrer que $N(V)$ est un sev de $\mathrm{End}_K(E)$. Est-ce un sous-anneau ?
2. Montrer qu'il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \dots, v_r)$ est une base de V.
3. Montrer que $M_B(N(V)) = F$.
4. Montrer que $\dim N(V) = n(n - r)$.

Exercice 2.23. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de E de dimension $r \geq 1$. Soient

$$S(V) = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid f(V) \subseteq V\} \quad \text{et}$$

$$G = \{(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \mid a_{i,j} = 0 \text{ pour tous } r < i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq r\}.$$

1. Montrer que $S(V)$ est un sev de $\mathrm{End}_K(E)$. Est-ce un sous-anneau ?
2. Montrer qu'il existe une base B telle que $M_B(S(V)) = G$ (cf. exercice 2.22).
3. Montrer que $\dim S(V) = n^2 - (n - r)r$.

Exercice 2.24 (Centre de $\mathrm{End}_K(E)$)**.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour $1 \leq \ell, m \leq n$ soient les matrices élémentaires $E_{\ell,m} \in M_n(K)$ (cf. exercice 2.21).

1. Soit $M \in M_n(K)$. Montrer que $M \in Z(M_n(K))$ ssi $ME_{\ell,m} = E_{\ell,m}M$ pour tous $1 \leq \ell, m \leq n$.
2. Montrer que $Z(M_n(K)) = \{a\mathbf{1}_n \,;\, a \in K\}$.
3. Montrer que $Z(\mathrm{End}_K(E)) = \{a\,\mathrm{Id}_E \,;\, a \in K\}$.

Exercice 2.25 (Conjugaison)**.** Soient K un corps et $n \geq 1$. Pour $P \in GL_n(K)$ soit l'application

$$\begin{aligned} c_P : M_n(K) &\longrightarrow M_n(K) \\ M &\longmapsto PMP^{-1}. \end{aligned}$$

1. Montrer que c_P est un automorphisme de K-espace vectoriel et d'anneau.
2. Soient $P, Q \in GL_n(K)$. Montrer que $c_P \circ c_Q = c_{PQ}$.
3. Soit $P \in GL_n(K)$ tel que $P^m = \mathbf{1}_n$. Montrer que $(c_P)^m = \mathrm{Id}_{M_n(K)}$.

Exercice 2.26 (Transposition)**.** Soient K un corps et $n \geq 1$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \theta : M_n(K) &\longrightarrow M_n(K) \\ A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} &\longmapsto A^t \underset{\text{def}}{=} (a_{j,i})_{1\leq i,j\leq n}. \end{aligned}$$

1. Montrer que θ est un automorphisme de K-espace vectoriel.
2. Montrer que $\theta \circ \theta = \mathrm{Id}_{M_n(K)}$.
3. Soient $A, B \in M_n(K)$. Montrer que $\theta(AB) = \theta(B)\theta(A)$.
4. Soit $A \in M_n(K)$. Montrer que $A \in GL_n(K)$ si et seulement si $\theta(A) \in GL_n(K)$.
5. Soit $A \in GL_n(K)$. Montrer que $\theta(A^{-1}) = \theta(A)^{-1}$.

Exercice 2.27 (Matrices triangulaires)**.** Soient K un corps et $n \geq 1$ entier. Soit

$$B = \{(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \mid \ j < i \Rightarrow a_{i,j} = 0\}.$$

1. Montrer B est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $M_n(K)$.
2. Montrer que si $M \in B \cap GL_n(K)$, alors $M^{-1} \in B$.
3. Mêmes questions pour $B' = \{(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \mid \ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0\}$.

Exercice 2.28. Soient K un corps et $n \geq 1$. Soient

$$\mathcal{S} = \{A \in M_n(K) \mid A^t = A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \{A \in M_n(K) \mid A^t = -A\}.$$

1. Montrer que $M_n(K) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mathcal{S} = \langle A + A^t \,;\, A \in M_n(K)\rangle$ et $\mathcal{A} = \langle A - A^t \,;\, A \in M_n(K)\rangle$.
3. Montrer que $\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 2.29 (Trace d'un endomorphisme)**.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit l'application trace

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} : M_n(K) &\longrightarrow K \\ A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} &\longmapsto \sum_{1\leq i\leq n} a_{i,i}. \end{aligned}$$

1. Montrer que tr est linéaire.
2. Soient $A, B \in M_n(K)$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Soient $A \in M_n(K)$ et $P \in GL_n(K)$. Montrer que $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

4. Soient $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et B, C des bases de E. Montrer que $\mathrm{tr}(M_B(f)) = \mathrm{tr}(M_C(f))$.
5. Montrer qu'il existe une unique application linéaire
$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow K$$
telle que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{tr}(M_B(f))$ pour toute base B de E.
6. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1$.

Exercice 2.30. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour $g \in \mathrm{End}_K(E)$ soit l'application (cf. exercice 2.29)
$$\begin{aligned} \tau_g : \mathrm{End}_K(E) &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto \mathrm{Tr}(g \circ f). \end{aligned}$$

1. Montrer que τ_g est linéaire.
2. Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Pour $1 \leq i, j \leq n$ soient $f_{i,j} \in \mathrm{End}_K(E)$ donnés par $f_{i,j}(v_k) = 0$ si $k \neq j$ et $f_{i,j}(v_j) = v_i$. Montrer que $\{f_{i,j}\,;\, 1 \leq i, j \leq n\}$ est une base de $\mathrm{End}_K(E)$.
3. Montrer que $f_{k,\ell} \circ f_{i,j} = \mathbf{0}$ si $\ell \neq i$ et $f_{k,i} \circ f_{i,j} = f_{k,j}$.
4. Soient $a_{i,k} \in K$ tels que $g(v_k) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,k} v_i$. Montrer que $g = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} f_{i,j}$.
5. Montrer que $\tau_g(f_{i,j}) = a_{j,i}$.

Soit l'application
$$\begin{aligned} \Theta : \mathrm{End}_K(E) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{End}_K(E), K) \\ g &\longmapsto \tau_g\,. \end{aligned}$$

6. Montrer que Θ est linéaire.
7. Montrer que Θ est injective.
8. Montrer que Θ est bijective.
9. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{End}_K(E), K)$ tel que $\phi(f \circ h) = \phi(h \circ f)$ pour tous $f, h \in \mathrm{End}_K(E)$.
   (a) Soit $g \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $\Theta(g) = \phi$. Montrer que $\Theta(g \circ f) = \Theta(f \circ g)$ pour tout $f \in \mathrm{End}_K(E)$.
   (b) Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $\phi = a\,\mathrm{Tr}$ (cf. exercice 2.24).
10. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \langle f \circ h - h \circ f\,;\, f, h \in \mathrm{End}_K(E) \rangle$.

3. Le déterminant

Exercice 3.1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & 1 \\ 1 & 1 & e^{-2\pi i/3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. Montrer que $((1,1,1), (1, e^{2\pi i/3}, 1), (1, 1, e^{-2\pi i/3}))$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 3.2 (Matrices triangulaires)**.** Soient K un corps et $n \geq 1$ entier.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ avec $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$. Montrer que $\det(A) = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}$.
2. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ avec $b_{i,j} = 0$ pour $i > j$. Montrer que $\det(B) = \prod_{1 \leq i \leq n} b_{i,i}$.

Exercice 3.3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $((a,0,0),(b,1,0),(c,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $a \neq 0$.
2. Montrer que $((a,0,0),(1,b,0),(1,c,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $ab \neq 0$.
3. Montrer que $((a,0,0),(1,b,0),(1,1,c))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $abc \neq 0$.

Exercice 3.4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathrm{End}_K(E)$. Montrer que $f \circ g$ est bijective si et seulement si f et g sont bijectives.

Exercice 3.5. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f^k = \mathbf{0}$. Montrer que f n'est pas bijective.

Exercice 3.6. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $v \in E$ tel que $\det(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)) \neq 0$.

(ii) Il existe une base B de E et $a_1, \ldots, a_n \in K$ tels que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.7. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x + ay + z,\ x + y + az,\ ax + y + z). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\det(f_a) = a^3 - 3a + 2$.
2. Montrer que f_a est bijective si et seulement si $a \notin \{-2, 1\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{-2}) = \mathrm{Im}(f_1)$ et $\mathrm{Im}(f_{-2}) = \mathrm{Ker}(f_1)$.

Exercice 3.8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient $A, P, Q \in M_4(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(P)$ et $\det(Q)$.
2. Calculer PAQ.
3. Montrer que $\det(A) = (a-b)^3(a+3b)$.
4. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tel que $A = M_B(f)$ dans une base B de $\mathbb{R}^4$. Calculer $\dim \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3.9. Soient $n \geq 1$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^3 + f = \mathbf{0}$.

1. Montrer que $\det(f)^3 = (-1)^n \det(f)$.
2. Montrer que si f est bijective alors n est pair.
3. Donner un exemple d'application $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ telle que $g^3 + g = \mathbf{0}$.

Exercice 3.10. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$ telle que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. Soient $n = \dim E$ et $r = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $\det(f) = (-1)^{n-r}$.

Exercice 3.11 (Matrices Compagnons)**.** Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ l'application linéaire donnée par $f(v_i) = v_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $f(v_n) = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ avec $a_1, \ldots, a_n \in K$.

1. Montrer que $\det(f) = (-1)^{n+1} a_1$.
2. Déterminer $M_B(f)$ et calculer $\det(M_B(f))$ en développant selon la première ligne.

Exercice 3.12. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $V \oplus W = E$. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ telle que $f(V) \subseteq V$ et $f(W) \subseteq W$. Soient $g, h : E \to E$ les applications données par $g(v+w) = f(v) + w$ et $h(v+w) = v + f(w)$ pour tous $v \in V$, $w \in W$.

1. Montrer que g et h sont linéaires.
2. Montrer que $g \circ h = h \circ g = f$.
3. Soit $f_{|V} \in \mathrm{End}_K(V)$ la restriction de f à V. Montrer que $\det(g) = \det(f_{|V})$.
4. Montrer que $\det(f) = \det(f_{|V}) \det(f_{|W})$.

Exercice 3.13. Soient K un corps et $n \geq 1$. Soit l'ensemble

$$SL_n(K) \underset{\text{def}}{=} \{A \in M_n(K) \mid \det(A) = 1\}.$$

1. Montrer que $\det : GL_n(K) \to K^\times$ est un morphisme de groupe surjectif.
2. Montrer que $SL_n(K) \lhd GL_n(K)$.
3. Montrer que $GL_n(K)/SL_n(K) \simeq K^\times$.

Exercice 3.14 (Vandermonde)**.** Soient K un corps et $n \geq 1$. La matrice de Vandermonde de $x_1, \ldots, x_n \in K$ est

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

1. Soient $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in K^n$ et $P_a(X) = a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$. Montrer que $V_n(x_1, \ldots, x_n)\, a = (P_a(x_1), \ldots, P_a(x_n))$.
2. Montrer que $\det(V_n(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ si et seulement si il existe un polynôme non nul $P(X) \in K[X]$ tel que $\deg P \leq n-1$ et $P(x_k) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
3. Montrer que $\det(V_n(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$ si et seulement si $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$.
4. Soit $D_n(X) = \det(V_n(X, x_2, \ldots, x_n))$. Montrer que $D_n(X) \in K[X]_{n-1}$ et que son coefficient en X^{n-1} est $(-1)^{n-1} \det(V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n))$.
5. On suppose que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$. Soit $x \in K$. Montrer que $D_n(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{x_2, \ldots, x_n\}$.
6. Montrer que $D_n(X) = (-1)^{n-1} \det(V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)) \prod_{2 \leq j \leq n} (X - x_j)$.
7. Montrer que

$$\det\big(V_n(x_1, \ldots, x_n)\big) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)\,.$$

Exercice 3.15 (Matrice circulante)**.** Soit $n \geq 1$. La matrice circulante de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ est

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Soit $P_a(X) = a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^n = 1$ et $v = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $C(a_0, \dots, a_{n-1})\, v = P_a(\alpha)\, v$.
2. Soit $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$ soit $v_k = (1, \zeta_n^k, \zeta_n^{2k}, \dots, \zeta_n^{(n-1)k}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $(v_0, \dots, v_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (cf. exercice 3.14).
3. Montrer que $\det(C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \prod_{0 \leq k \leq n-1} P_a(\zeta_n^k)$.

Exercice 3.16. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Pour tout $a \in K$ soit $V(a) = \{v \in E \mid f(v) = av\}$.

1. Montrer que $V(a)$ est un sous-espace vectoriel de E et que $f(V(a)) \subseteq V(a)$.
2. Montrer que si $a \neq b$ alors $V(a) \cap V(b) = \{0_E\}$.
3. Montrer que l'ensemble $S = \{a \in K \mid \dim V(a) \neq 0\}$ est fini.
4. Soit $V = \langle V(a)\,;\, a \in S\rangle$. Montrer que $f(V) \subseteq V$.
5. Montrer que $\det(f_{|V}) = \prod_{a \in S} a^{\dim V(a)}$.