Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2013

Documents autorisés.

Exercice 1. Pour une application $h : E \to E$ et $n \geq 1$ entier on pose $h^n = h \circ \ldots \circ h$ (n fois). Soient $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires dont les matrices dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ sont

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $C = ((1,-1,0),(2,1,2),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices de f et de g dans la base C.
3. Montrer que $f^2 = \mathbf{0}$, $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et $f \circ g = g \circ f = -f$.
4. Soit $n \geq 1$ entier. Montrer que

$$(f+g)^n = \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - nf & \text{si } n \text{ est pair} \\ g + nf & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 2. Soient E, F des K-espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire, et V un sous-espace vectoriel de E. Soit

$$U = \{u \in E \mid \exists\, v \in V \text{ tel que } f(u) = f(v)\}.$$

1. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $U = V + \mathrm{Ker}(f)$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+y+z\,,\, x-y+z)$. Pour $a \in \mathbb{R}$ soient

$$V_a = \langle\, (1,1,0),(0,a,1) \,\rangle \quad \text{et} \quad U_a = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, v \in V_a \text{ tel que } f(u) = f(v)\}.$$

3. Montrer que $V_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + az = 0\}$.
4. Déterminer $\dim U_a$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soient $f \in \mathrm{End}_K(E)$ et $\phi : \mathrm{End}_K(E) \to \mathrm{End}_K(E)$, $g \mapsto f \circ g \circ f$. Montrer que ϕ est linéaire et que $\mathrm{Ker}(\phi) = \{g \in \mathrm{End}_K(E) \mid g(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}$.

Soient $V, W \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = V \oplus W$ et $\dim V = r$. Soit $p \in \mathrm{End}_K(E)$ la projection sur V parallèlement à W.

2. Soient $(v_1, \ldots, v_r)$ une base de V, $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base de W, et $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Soient $g \in \mathrm{End}_K(E)$ et $M_B(g) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ la matrice de g dans la base B. Montrer que $p \circ g \circ p = \mathbf{0}$ si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq r$.
3. Montrer que $P = \{p \circ g \circ p\,;\, g \in \mathrm{End}_K(E)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_K(E)$ et déterminer sa dimension.