

Correction de l'examen sur les groupes de janvier 1979 (A.7)

I.

1. On prouve que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$:

(a) $G \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ puisque quel que soit $g \in G$, $\det(g) = b > 0$.

(b) Le neutre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, en effet, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

(c) La loi \cdot est interne et partout définie dans G , pour tout $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$:

$$g_1 \cdot g_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

Donc $g_1 \cdot g_2 \in G$ puisque $c+ad \in \mathbb{R}$ et $bd > 0$ car $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b > 0$ et $d > 0$ vu que $g_1, g_2 \in G$.

(d) Quel que soit $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$, on calcule g^{-1} :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Donc $g^{-1} \in G$ puisque $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{b} > 0$ car $a, b \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ vu que $g \in G$.

Pour prouver que G n'est pas commutatif, il faut trouver deux éléments g_1 et $g_2 \in G$ tels que $g_1 \cdot g_2 \neq g_2 \cdot g_1$. Par exemple avec $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en effet :

$$g_1 \cdot g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 \cdot g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Par définition du centre $Z(G)$, on a :

$$\begin{aligned} Z(G) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in G : \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ pour tout } \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in G : \begin{pmatrix} 1 & a+xb \\ 0 & yb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+ay \\ 0 & by \end{pmatrix} \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } b > 0 \in G \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in G : a+xb = x+ay \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } b > 0 \in G \right\} \end{aligned}$$

En particulier en fixant les valeurs $a = 0$ et $b = 2$, la condition d'appartenance au centre doit être vérifiée. Dans ce cas, on obtient la condition nécessaire: $x = 2x$, donc $x = 0$. La condition d'appartenance au centre devient donc : $x = 0$ et $ay = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc $y = 1$, le centre se réduit donc au neutre (car tout sous-groupe de G contient l'identité), $Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Soit σ l'application de G dans G tel que $\sigma \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & a+b-1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pour prouver que σ est un *automorphisme interne de G* , il faut prouver que il existe $h \in G$ tel que pour tout $g \in G$, $\sigma(g) = h \cdot g \cdot h^{-1}$ ou encore $\sigma(g) \cdot h = h \cdot g$. Notons $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma(g).h &= h.g \\ \begin{pmatrix} 1 & a+b-1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & x+ay+by-y \\ 0 & by \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a+bx \\ 0 & yb \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On cherche donc $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y > 0$ tels que :

$$x + ay + by - x = a + bx \quad (1)$$

quel que soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$. Cette équation doit être vérifiée en particulier lorsque $a = 0$ et $b = 2$, on obtient alors $x + y = 2x$, ou encore $x = y$. En remplaçant x par y dans l'équation (1), on obtient que $ax = a$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$, donc $x = 1$. On en conclut que σ est bien un automorphisme interne, car quel que soit $g \in G$, on peut écrire :

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. Pour prouver que $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-groupe normal de G , on commence par prouver que c'est un sous-groupe de G .

(a) $H \subseteq G$, il suffit de prendre $b = 1$.

(b) Le neutre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, en effet, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ avec $a = 0$.

(c) La loi \cdot est interne et partout définie dans H , pour tout $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$:

$$h_1.h_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $h_1.h_2 \in H$ puisque $c+a \in \mathbb{R}$ car a et $c \in \mathbb{R}$, vu que $h_1, h_2 \in H$.

(d) Quel que soit $h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, on calcule h^{-1} :

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $h^{-1} \in H$ puisque $-a \in \mathbb{R}$ car $a \in \mathbb{R}$ vu que $h \in H$.

Il reste à prouver que H est un sous-groupe normal de G . Pour cela on va utiliser le critère du sous-groupe normal.

Il faut prouver que quel que soient $g \in G$ et $h \in H$, $g.h.g^{-1} \in H$. Notons $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$g.h.g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{ac+a^2}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

On a donc bien que H est un sous-groupe normal de G .

On doit maintenant montrer que $\langle G/H, \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{R}, + \rangle$. Pour cela, on va utiliser le théorème d'isomorphisme qui dit qu'étant donné $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme, on a :

$$G_1 / \text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi) \quad (2)$$

Le problème se ramène donc à trouver un morphisme surjectif $\varphi : \langle G, \cdot \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}, + \rangle$ tel que $\text{Ker}(\varphi) = H$. Pour que φ soit un morphisme de $\langle G, \cdot \rangle$ dans $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, il doit vérifier l'équation suivante :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c+ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \quad (3)$$

On voit que si on pose $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \ln(b)$, l'équation (3) est vérifiée, vu que $\ln(b.d) = \ln(b) + \ln(d)$. Ce morphisme est surjectif vu que $\ln(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective, et donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Calculons $\text{Ker}(\varphi)$,

$$\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G : \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G : \ln(b) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : b = 1 \right\} = H$$

En appliquant le théorème d'isomorphisme (2), on obtient :

$$G/H \cong \mathbb{R}$$