Correction de l'examen sur les groupes de janvier 1983 (A.11)

1. On commence par prouver que $\langle G, . \rangle$ est un groupe.

   (a) La loi . est interne et partout définie dans G, en effet :

   $$\forall (a,b,c),\ (a',b',c') \in G \quad (a,b,c).(a',b',c') = (a+a', b+b', c+c'+a'b) \in G$$

   par les propriétés du calcul dans $\mathbb{R}$.

   (b) $(0,0,0)$ est le neutre pour la loi . dans G :

   $$\forall (a,b,c) \in G \quad (a,b,c).(0,0,0) = (a+0, b+0, c+0+0.b) = (a,b,c) = (0,0,0).(a,b,c) = (0+a, 0+b, 0+c+a.0)$$

   (c) La loi . est associative dans G, en effet, pour tout $(a,b,c),\ (a',b',c'),\ (a'',b'',c'') \in G$:

   $$\begin{aligned}
   \left((a,b,c).(a',b',c')\right).(a'',b'',c'') &= (a+a', b+b', c+c'+a'b).(a'',b'',c'') \\
   &= \left((a+a')+a'', (b+b')+b'', c+c'+a'b+c''+a''(b+b')\right) \\
   &= \left(a+(a'+a''), b+(b'+b''), c+c'+c''+a''b'+(a'+a'')b\right) \\
   &= (a,b,c).\left(a'+a'', b'+b'', c'+c''+a''b'\right) \\
   &= (a,b,c).\left((a',b',c').(a'',b'',c'')\right)
   \end{aligned}$$

   par les propriétés du calcul dans $\mathbb{R}$.

   (d) Chaque élément $(a,b,c) \in G$ admet un élément inverse $(a,b,c)^{-1} = (-a, -b, ab-c) \in G$:

   $$\begin{aligned}
   (a,b,c).(-a,-b,ab-c) &= (a+(-a), b+(-b), c+(ab-c)+(-a)b) = (0,0,0) \\
   (-a,-b,ab-c).(a,b,c) &= ((-a)+a, (-b)+b, (ab-c)+c+a(-b)) = (0,0,0)
   \end{aligned}$$

   Reste à prouver que G est non commutatif, pour cela, il suffit de trouver deux éléments g_1 et $g_2 \in G$ tels que $g_1.g_2 \neq g_2.g_1$; prenons $(0,1,0)$ et $(2,0,0)$ deux éléments de G :

   $$(0,1,0).(2,0,0) = (2,1,2) \neq (2,1,0) = (2,0,0).(0,1,0)$$

   Ce qui prouve que G n'est pas commutatif.

2. Par définition, le centre de G, noté $Z(G)$ est défini par :

   $$Z(G) = \{g\ :\ \forall h \in G\ g.h = h.g\}$$

   En appliquant cette définition au groupe G, on obtient :

   $$Z(G) = \{(x,y,z)\ :\ \forall (a,b,c) \in G\ (a,b,c).(x,y,z) = (x,y,z).(a,b,c)\}$$

   Donc le triplet (x,y,z) appartient au centre de G si et seulement si l'équation (1) est vérifiée quels que soient $(a,b,c) \in G$.

   $$(a,b,c).(x,y,z) = (x,y,z).(a,b,c) \Leftrightarrow (a+x, b+y, c+z+xb) = (x+a, y+b, z+c+ay) \tag{1}$$

   On voit facilement que pour vérifier l'équation (1) quels que soient $(a,b,c) \in G$, il est équivalent de vérifier l'équation (2) pour tout a, $b \in \mathbb{R}$:

   $$xb = ay \tag{2}$$

   Donc en particulier pour $a = 1$ et $b = 0$, l'équation (2) doit être vérifiée, on en conclut que $y = 0$ est une *condition nécessaire* pour que (x,y,z) appartiennent à $Z(G)$. En remplaçant y par 0 dans l'équation (2), la condition pour appartenir au centre se résume à $xb = 0$ quel que soit $b \in \mathbb{R}$, donc $x = 0$. On peut maintenant conclure que :

   $$Z(G) \subseteq \{(0,0,z)\ : z \in \mathbb{R}\}$$

   Prouver que $\{(0,0,z)\ : z \in \mathbb{R}\} \subseteq Z(G)$ est un exercice facile.

3. Pour montrer que $\langle G/Z(G),.\rangle \cong \langle \mathbb{R}^2,+\rangle$, nous allons utiliser le théorème d'isomorphisme qui nous dit qu'étant donné $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme, on a :
$$G_1/\operatorname{Ker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi) \tag{3}$$
Le problème se ramène donc à trouver un morphisme surjectif $\varphi : \langle G,.\rangle \to \langle \mathbb{R}^2,+\rangle$ tel que $\operatorname{Ker}(\varphi) = Z(G)$. Un candidat pour φ est $\varphi((a,b,c)) = (a,b)$, vérifions qu'il a les propriétés requises :

- φ est un morphisme, pour tout (a,b,c), $(a',b',c') \in G$:
$$\begin{array}{lcl} \varphi\left((a,b,c).(a',b',c')\right) & \stackrel{?}{=} & \varphi((a,b,c)).\varphi\left((a',b',c')\right) \\ \varphi\left((a+a',b+b',c+c'+a'b)\right) & \stackrel{?}{=} & (a,b)+(a',b') \\ (a+a',b+b') & = & (a+a',b+b') \end{array}$$
- φ est clairement surjectif, donc $\operatorname{Im}(\varphi) : \mathbb{R}^2$, puisque $\forall a,b \in \mathbb{R}\ \varphi(a,b,0) = (a,b)$.
- Calcul du noyau de φ :
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\varphi) &= \{(a,b,c) \in G\ :\ \varphi((a,b,c)) = (0,0)\} \\ &= \{(a,b,c) \in G\ :\ (a,b) = (0,0)\} \\ &= \{(0,0,c)\ :\ c \in \mathbb{R}\} \\ &= Z(G) \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer le théorème d'isomorphisme (3) et on obtient le résultat souhaité.

4. Etant donné $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, pour montrer que $t_{(\alpha,\beta)}$ est un automorphisme interne, il faut montrer que :
$$\exists (x,y,z) \in G,\ \forall (a,b,c) \in G\ \ :\ t_{(\alpha,\beta)}((a,b,c)) = (x,y,z).(a,b,c).(x,y,z)^{-1}$$
En utilisant la définition de $t_{(\alpha,\beta)}$ et de la loi . dans G, on obtient :
$$\begin{aligned} t_{(\alpha,\beta)}((a,b,c)) &= (x,y,z).(a,b,c).(x,y,z)^{-1} \\ (a,b,c+\alpha a+\beta b) &= (x+a,y+b,z+c+ay).(-x,-y,xy-z) \\ &= (x+a+(-x),y+b+(-y),z+c+ay+xy+(-z)+(-x)(y+b)) \\ &= (a,b,c+ya-xb) \end{aligned}$$
Donc en prenant, par exemple, $(x,y,z) = (-\beta,\alpha,0)$, on a le résultat souhaité.

5. Par la question 2, on sait que $\langle G/Z(G),.\rangle \cong \langle \mathbb{R}^2,+\rangle$, d'autre part, on a toujours que $\langle G/Z(G),.\rangle \cong \langle \operatorname{Inn}(G),\circ\rangle$, en composant ces deux isomporphismes, on obtient un isomorphisme de $\langle \mathbb{R}^2,+\rangle$ dans $\langle \operatorname{Inn}(G),\circ\rangle$.