Correction de l'examen sur les groupes de septembre 1977 (A.4)

1. Pour prouver que G est un groupe, nous allons prouver que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$. Pour cela, nous utilisons le critère du sous-groupe.

   (a) $G \subseteq GL_2(\mathbb{R})$. En effet, $\det \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 2^{-0} \end{pmatrix} \in G$ puisque $0 \in \mathbb{R}$.

   (c) La loi . est interne et partout définie dans G. Etant donné $g_1, g_2 \in G$, $g_1.g_2 \in G$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}, \; g_2 = \begin{pmatrix} 2^c & d \\ 0 & 2^{-c} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$$

$$g_1.g_2 = \begin{pmatrix} 2^a.2^c + b.0 & 2^a.d + b.2^{-c} \\ 0.2^c + 2^{-a}.0 & 0.d + 2^{-a}.2^{-c} \end{pmatrix} \qquad \text{calcul matriciel}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{a+c} & 2^a.d + b.2^{-c} \\ 0 & 2^{-(a+c)} \end{pmatrix} \qquad \text{règles des exposants}$$

   Donc $g_1.g_2 \in G$, puisque $a + c \in \mathbb{R}$ et $2^a.d + b.2^{-c} \in \mathbb{R}$.

   (d) Chaque élément g de G possède un inverse g^{-1}.

$$g = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } a,\ b, \in \mathbb{R}.$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-a} & -b \\ 0 & 2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-a} & -b \\ 0 & 2^{-(-a)} \end{pmatrix} \qquad \text{calcul matriciel}$$

   Donc $g^{-1} \in G$ puisque $-b \in \mathbb{R}$.

2. En prenant $g_1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 1 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} \in G$, on obtient :

$$g_1.g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4^{-1} \end{pmatrix}$$

$$g_2.g_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2^{-1} \\ 0 & 4^{-1} \end{pmatrix}$$

   Donc clairement, il existe g_1 et $g_2 \in G$ tels que $g_1.g_2 \neq g_2.g_1$, ce qui prouve que G n'est pas commutatif.

3. On prouve d'abord que H est un sous-groupe de G :

   (a) $H \subseteq G$. En effet, il suffit de prendre $a = 0$.

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ puisque $0 \in \mathbb{R}$.

   (c) La loi . est interne et partout définie dans H. Etant donné $h_1, h_2 \in G$, $h_1.h_2 \in G$.

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; h_2 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } b,\ d \in \mathbb{R}.$$

$$h_1.h_2 = \begin{pmatrix} 1 & d + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{calcul matriciel}$$

   Donc $h_1.h_2 \in H$, puisque $d + b \in \mathbb{R}$.

   (d) Chaque élément h de H possède un inverse h^{-1}.

$$h = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } b \in \mathbb{R}.$$

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{calcul matriciel}$$

   Donc $h^{-1} \in H$ puisque $-b \in \mathbb{R}$.

Reste à montrer que H est un sous-groupe normal de G, on va utiliser le critère du sous-groupe normal, il faut pouver que :

$$\forall g \in G, \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H \tag{1}$$

On prend $g = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, en remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{-a} & -b \\ 0 & 2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^a.(-b) + 2^a.(2^a.d+b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $ghg^{-1} \in H$ puisque $2^a.(-b) + 2^a.(2^a.d+b) \in \mathbb{R}$.

4. Pour prouver que $\langle G/H, . \rangle \cong \langle \mathbb{R}, + \rangle$, nous allons utiliser le théorème d'isomorphisme qui nous dit qu'étant donné $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme, on a :

$$G_1 / \operatorname{Ker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi) \tag{2}$$

Le problème se ramène donc à trouver un morphisme surjectif $\varphi : \langle G, . \rangle \to \langle \mathbb{R}, + \rangle$ tel que $\operatorname{Ker}(\varphi) = H$. Etant donné $g_1, g_2 \in G$, pour avoir que φ soit un morphisme de $\langle G, . \rangle$ dans $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, il doit vérifier l'équation suivante :

$$\varphi(g_1.g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) \tag{3}$$

En prenant $g_1 = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 2^c & d \\ 0 & 2^{-c} \end{pmatrix} \in G$, l'équation (3) devient :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^c & d \\ 0 & 2^{-c} \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 2^c & d \\ 0 & 2^{-c} \end{pmatrix}\right)$$

ou encore :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 2^{a+c} & 2^a.d + b.2^{-c} \\ 0 & 2^{-(a+c)} \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 2^c & d \\ 0 & 2^{-c} \end{pmatrix}\right)$$

Au vu de cette dernière équation, on peut conclure que si on choisit

$$\varphi : \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \to a,$$

on a que φ satisfait bien l'équation (3), clairement φ est un morphisme surjectif (c'est à dire $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$). Calculons le noyau de φ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(\varphi) &= \{g \in G : \varphi(g) = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \in G \;:\; \varphi\left(\begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}\right) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \in G \;:\; a = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\} \\
&= H
\end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser l'équation (2) et on obtient :

$$G/H \cong \mathbb{R}$$

5. Le centre d'un groupe G, noté $Z(G)$ est donné par l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.

$$Z(G) = \left\{ g \in G \;:\; \forall g' \in G \quad g.g' = g'.g \right\} \tag{4}$$

Si on applique la définition 4 au groupe G, on obtient :

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & y \\ 0 & 2^{-x} \end{pmatrix} \in G \ : \ \forall \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \in G \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 2^x & y \\ 0 & 2^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^x & y \\ 0 & 2^{-x} \end{pmatrix} \right\}$$

ou encore

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & y \\ 0 & 2^{-x} \end{pmatrix} \in G \ : \ \forall \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \in G \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 2^{a+x} & 2^a.y + b.2^{-x} \\ 0 & 2^{-(a+x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+a} & 2^x.b + y.2^{-a} \\ 0 & 2^{-(x+a)} \end{pmatrix} \right\}$$

Pour appartenir au centre, il faut et il suffit de trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R} \qquad 2^a.y + b.2^{-x} = 2^x.b + y.2^{-a} \tag{5}$$

Vu que la condition (5) doit être vérifiée pour tout a, b réels, en particuliers, elle doit être vérifiée pour $a = 0$ et $b = 1$. Dans ce cas, l'équation de la condition (5) devient :

$$y + 2^{-x} = 2^x + y \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-x} = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Une condition nécessaire pour que la condition 5 soit vérifiée est $x = 0$. On remplace cette donnée dans la condition 5, et on obtient une nouvelle condition qui ne porte plus que sur y :

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R} \qquad 2^a.y + b = b + y.2^{-a} \tag{6}$$

On a donc que $2^a.y = y.2^{-a}$ quel que soit $b \in \mathbb{R}$, la seule solution possible est que y soit nul.

Donc les valeurs de x et y qui satisfont la condition (5) sont $x = 0$ et $y = 0$. On a donc que le centre de G se réduit au singleton formé de la matrice identité (puisqu'un sous-groupe de G contient toujours la matrice identité) :

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & y \\ 0 & 2^{-x} \end{pmatrix} \in G \ : x = 0 \text{ et } y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Remarque:

Dans un souci de concision, on pourrait travailler avec $M(a,b)$ comme notation pour la matrice $\begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix}$. Dans ce cas, la multiplication de deux matrices de G se traduit par :

$$M(a,b).M(c,d) = M\left(a + c, 2^a.d + b.2^{-c}\right)$$

Avec cette notation, l'équation (3) qui permet de trouver le morphisme de la question 4 se traduit par :

$$\varphi\left(M\left(a + c, 2^a.d + b.2^{-c}\right)\right) = \varphi\left(M(a,b)\right) + \varphi\left(M(c,d)\right)$$