Correction de l'examen sur les groupes de septembre 1978 (A.6)

1. Pour prouver que K est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$, on utilise le critère du sous-groupe.

   (a) $K \subseteq G_1 \times G_2$ par définition de K.

   (b) Le neutre $(1_{G_1}, 1_{G_2}) \in K$, en effet $h_1(1_{G_1}) = h_2(1_{G_2}) = 1_H$ puisque h_1 et h_2 sont des morphismes de groupe.

   (c) La loi . est interne et partout définie dans K.

   $$\forall (x_1,x_2),\ (y_1,y_2) \in K \qquad (x_1,x_2).(y_1,y_2) \in K$$

   Par définition de la loi . dans le produit de groupes $G_1 \times G_2$, on a $(x_1,x_2).(y_1,y_2) = (x_1.y_1, x_2.y_2)$. Il faut donc prouver que $h_1(x_1.y_1) = h_2(x_2.y_2)$.

   $$\begin{aligned} h_1(x_1.y_1) &= h_1(x_1).h_1(y_1) && \text{car } h_1 \text{ est un morphisme de } G_1 \text{ dans } H \\ &= h_2(x_2).h_2(y_2) && \text{car } (x_1,x_2) \in K \text{ et } (y_1,y_2) \in K. \\ &= h_2(x_2.y_2) && \text{car } h_2 \text{ est un morphisme de } G_2 \text{ dans } H \end{aligned}$$

   (d) Pour tout élément $(x_1,x_2) \in K$, son inverse $(x_1,x_2)^{-1} = \left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right) \in K$, en effet :

   $$\begin{aligned} h_1\left(x_1^{-1}\right) &= (h_1(x_1))^{-1} && \text{car } h_1 \text{ est un morphisme} \\ &= (h_2(x_2))^{-1} && \text{car } (x_1,x_2) \in K. \\ &= h_2\left(x_2^{-1}\right) && \text{car } h_2 \text{ est un morphisme.} \end{aligned}$$

   On a donc bien prouvé que K est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$.

2. L'application $h : K \to H : h((x_1,x_2)) = h_1(x_1)$ est un morphisme. Pour tout (x_1,x_2), $(y_1,y_2) \in K$, on a, d'une part :

   $$\begin{aligned} h((x_1,x_2).(y_1,y_2)) &= h((x_1.y_1, x_2.y_2)) && \text{par définition de .} \\ &= h_1(x_1.y_1) && \text{par définition de } h. \end{aligned}$$

   D'autre part,

   $$\begin{aligned} h((x_1,x_2)).h((y_1,y_2)) &= h_1(x_1).h_1(y_1) && \text{par définition de } h \\ &= h_1(x_1.y_1) && \text{car } h_1 \text{ est un morphisme.} \end{aligned}$$

   On a l'égalité entre les deux membres, donc h est bien un morphisme.

3. Calculons le noyau de h :

   $$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(h) &= \{(x_1,x_2) \in K \ :\ h((x_1,x_2)) = 1_H\} && \text{par définition de Ker}(h). \\ &= \{(x_1,x_2) \in K \ :\ h_1(x_1) = 1_H\} && \text{par définition de } h. \\ &= \{(x_1,x_2) \in K \ :\ h_1(x_1) = 1_H \text{ et } h_2(x_2) = 1_H\} && \text{car } (x_1,x_2) \in K. \\ &= \{(x_1,x_2) \in K \ :\ x_1 \in \mathrm{Ker}(h_1) \text{ et } x_2 \in \mathrm{Ker}(h_2)\} && \text{par définition de Ker}(h_1) \text{ et Ker}(h_2). \\ &= \mathrm{Ker}(h_1) \times \mathrm{Ker}(h_2) \end{aligned}$$