AVRIL 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit S_3 le groupe des permutations de $E_3 = \{1, 2, 3\}$.
   (a) Donner un exemple de sous-groupe de S_3 à i éléments pour $i = 1$, 2, 3 et 4.
   (b) On note H_1 (respectivement H_2 et H_3) le groupe à 1 (respectivement 2 et 3) élément(s) que vous avez construit au point précédent. Décrire explicitement S_3/H_1, S_3/H_2 et S_3/H_3.
   (c) Parmi les ensembles S_3/H_1, S_3/H_2 et S_3/H_3 lesquels sont des groupes? Pour chacun des S_3/H_i qui est un groupe, trouver un groupe connu qui lui est isomorphe.

2. Soit S_n le groupe des permutations de $E_n = \{1, 2, ..., n\}$. Pour chaque $p \in S_n$, on définit la fonction $\bar{p}$ comme suit:

$$\bar{p}(i) = \begin{cases} p(n) & \text{si } i = 1 \\ p(i) & \text{si } i \in \{2, ..., n-1\} \\ p(1) & \text{si } i = n \end{cases}$$

   (a) Calculer $\bar{p}$ dans S_2 quand $p = \mathbb{1}$ et $p = (12)$.
   (b) Calculer $\bar{p}$ dans S_5 quand $p = \mathbb{1}$, $p = (12)$ et $p = (1234)$.
   (c) Calculer $\bar{p}$ dans S_n quand $p = \mathbb{1}$ et $p = (1n)$.
   (d) Prouver que $\bar{p} \in S_n$ quel que soit $p \in S_n$.
   (e) L'application $\sigma : S_n \to S_n$ définie par $\sigma(p) = \bar{p}$ est-elle un morphisme? Justifier.
   (f) L'application $\varphi : S_n \to S_n$ définie par $\varphi(p) = \big(p(1)\ p(n)\big) \cdot \bar{p}$ est-elle un morphisme? Justifier.
   (g) (*) De façon générale, en fonction de la décomposition en cycles de p, décrire les cycles de $\bar{p}$.
   (h) (*) Prouver que l'application $\theta : S_n \to S_n$ définie par $\theta(p) = (1n)\bar{p}$ est un automorphisme interne de S_n.

3. Soit $\langle G, \cdot, 1\rangle$ un groupe, $a \in G$, on note $a^G = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$, la classe de conjugaison de a dans G.
   (a) Soit $\langle H, \cdot, 1\rangle$ un groupe et σ un épimorphisme de G dans H calculer $\sigma(a^G)$.
   (b) Un isomorphisme σ de G dans G est appelé un automorphisme de G. On considère l'ensemble de tous les automorphismes de G, noté $Aut(G)$ muni de la composition de fonctions. Montrer que $Aut(G)$ est un groupe. On suppose que la composition de fonctions est une opération associative (vous ne devez pas le démontrer).
   (c) On sait que l'ensemble des automorphismes internes de G, noté $Int(G)$ est un sous-groupe de $Aut(G)$ (vous ne devez pas le montrer). Prouver que $Int(G)$ est un sous-groupe normal de $Aut(G)$.

(d) (*) Si G est fini, prouver que le nombre d'éléments de a^G divise l'ordre du groupe. Voici quelques indications sur la façon de procéder:

i. Prouver que $Stab_a = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\}$ est un sous-groupe de G.

ii. Prouver que pour tout élément g, $g' \in G$, $gag^{-1} = g'ag'^{-1}$ si et seulement si $g' \in gStab_a$.

iii. Prouver que le nombre de conjugués de a est égal à l'indice de $Stab_a$ dans G.