Logique mathématique
MARS 1994

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Ecrire la forme générale d'un terme du langage de la structure $\langle \mathbb{R}, sin, \leq \rangle$.

2. Trouver <u>toutes</u> les sous-structures <u>finies</u> de $\langle \mathbb{Z}, . \rangle$

3. Ecrire les conditions que doit vérifier une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour qu'elle soit un morphisme de $\langle \mathbb{R}, +, sin, 0 \rangle$ dans $\langle \mathbb{R}, +, sin, 0 \rangle$. Trouver 3 exemples d'un tel morphisme.

4. Ecrire la condition qu'un nombre réel $a \geq 0$ doit vérifier pour que $\langle [0, a], sin \rangle$ soit une sous-structure de $\langle \mathbb{R}, sin \rangle$. Donner tous les nombres réels $a \geq 0$ vérifiant cette condition.

5. Ecrire un énoncé vrai dans $\langle \mathbb{R}, sin \rangle$ mais faux dans toutes ses sous-structures de la forme $\langle [0, a], sin \rangle$.

6. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

   (a) i. Ecrire la condition que doit vérifer X pour qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tel que $X \notin \mathcal{U}$.

      ii. Prouver qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair } \} \notin \mathcal{U}$.

   (b) Ecrire la condition que doit vérifier X pour que l'ensemble $E = \{X\} \cup \{Y \subseteq \mathbb{N} \mid Y \text{ est cofini } \}$ ait la propritété d'intersection finie (p.i.f.).
   Prouver qu'il existe un ultrafiltre non principal vérifiant $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair } \} \in \mathcal{U}$.

7. Soit pour tout $n \geq 1$ la structure $\mathcal{A}_n = \langle \{0, 1, ..., n-1, n\}, f, \leq \rangle$, où $\leq$ est l'ordre induit par l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ et où f est la transposition $(n-1, n)$. Soit $\mathcal{A} = \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_n$ où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

   (a) Prouver que $\mathcal{A}$ a un plus grand élément (pour $\leq$). Trouver cet élément.

   (b) Prouver que l'ordre $\leq$ sur $\mathcal{A}$ est total.

   (c) Prouver que $\mathcal{A}$ vérifie la formule suivante:

   $$(\exists x)\Big((\forall y)\big(y > x \Rightarrow (\forall z)(y \geq z)\big)\Big)$$

   où $y > x$ est une abbréviation pour $y \geq x \wedge y \neq x$

(d) Prouver que $\mathcal{A}$ a un élément x tel qu'il existe un seul élément y de $\mathcal{A}$ vérifiant $x < y$.

(e) Décrire la fonction $f^{\mathcal{A}}$.

8. Soit la fonction $x \to 2^x$.
Que vaut 2^x quand x est infiniment petit? Même question quand x est infiniment grand positif, infiniment grand négatif.