Quelques remarques sur les corps D-valués

Some remarks on valued D-fields

Nicolas Guzy [1]

20 Place du Parc, 7000 Mons, Belgique

Abstract

Votre abstract en anglais ici. *To cite this article: N. Guzy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ? (?).*

Résumé

Votre résumé en français ici. *Pour citer cet article : N. Guzy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ? (?).*

1. Introduction

Dans ce papier tous les corps et anneaux considérés seront de caractéristique nulle. Nous allons nous intéresser à des classes particulières de corps D-valués introduits par T. Scanlon dans [9].

Un corps différentiel $\langle K, D\rangle$ est dit différentiel valué ou D-valué selon le formalisme de [9] s'il est muni d'une valuation v qui satisfait une condition de continuité forte pour la dérivation par rapport à la topologie de la valuation : $\forall x \in K^\times\ v(Dx) \geq v(x)$. En particulier tous les idéaux de l'anneau de valuation sont différentiels.

Un exemple canonique de corps D-valué pour un corps différentiel résiduel fixé $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$ et un groupe de valeurs fixé $\mathbf{G}$ est le corps de séries de puissances généralisées $\mathbf{k}((t; \mathbf{G}))$ muni de la valuation canonique par rapport à t et la dérivation définie composante par composante grâce à la dérivation δ sur le corps $\mathbf{k}$ (see Section 6 in [9]).

Dans la suite nous allons considérer un analogue différentiel du 17ième problème de Hilbert et théorème d'approximation « à la Greenberg »(voir [5]) pour les corps D-valués de séries de Laurent (i.e. $\mathbf{G} = \mathbb{Z}$) où $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$ est un corps différentiellement clos. Nous allons donc établir l'analogue différentiel des résultats de [1] et [2] dans le cadre des corps différentiels valués.

Email address: `nicolas.guzy@umh.ac.be` (Nicolas Guzy).

[1] boursier F.N.R.S

2. Fonctions rationnelles sur les corps D-valué des séries de Laurent

Let us recall that a valued field is a field together with a valuation $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$, where $\Gamma := v(K^{\times})$ is a totally ordered abelian group which is called the value group. The subring $\mathcal{O}_K := \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ of K is called the valuation ring of $\langle K, v\rangle$ and the residue field of K is $k_K := \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$, where $\mathcal{M}_K := \{x \in K : v(x) > 0\}$. The residue map is denoted by $\pi : \mathcal{O}_K \longmapsto k_K$. If a field is equipped with several valuations we add a subscript to distinguish one of them. By convention we will use $v(x) = 1$ for an element x of minimal positive value in the value group which is discrete in this case. Si K est un corps valué et L est une extension de corps, on dira que L a une valuation au-dessus de K si elle étend la valuation de K.

Définition 2.1 *Soit $\langle K, D, v, t\rangle$ un corps D-valué. La structure de corps D-valué muni d'un élément distingué t sera dit un corps D-valué discret si $v(t) = 1$.*

Rappelons maintenant un résultat important de S. Kochen (voir Lemme 3 in [8]).

Lemme 2.2 *Soit $\langle K, v\rangle$ un sous-corps valué d'un corps L et A un sous-anneau de L tel que $\mathcal{O}_K = A \cap K$. Soit $T = \{1 + ma : m \in \mathcal{M}_K,\ a \in A\}$ (en particulier $0 \notin T$ et T est un sous-ensemble multiplicativement clos). Alors la cloture intégrale de l'anneau A_T (le localisé de A en T) est l'intersection des anneaux de valuation $\mathcal{O}_L$ de L tel que $A \subset \mathcal{O}_L$ et $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_L \cap K$.*

Remarque 1 Dans notre cas particulier, $t \in K$ satisfait $v(t) = 1$ et on déduit comme dans [8] que :

(i) $T = \{1 + ta : a \in A\}$;

(ii) $\frac{1}{t} \in A_T \to \frac{1}{t} \in A$;

(iii) si R est un sous-anneau d'un corps L et $l \in L$ alors l^{-1} est intégral sur R implique l^{-1} est intégral sur R.

Rappelons le lemme suivant issu de [7].

Lemme 2.3 *Soit $\langle K, v, t\rangle$ un corps valué avec un élément distingué t. Alors on a les équivalences suivantes*

(i) $v(t) = 1$;

(ii) $t \in \mathcal{M}_K$ *et* $\gamma(K) \subset \mathcal{O}_K$ *où* $\gamma(X)$ *est l'opérateur* $\frac{X}{X^2 - t}$.

Nous donnons maintenant une caractrisation des extensions de corps D-valué discret au-dessus de $\langle K, D, v, t\rangle$. Pour cela nous introduisons la notation de dérivation logarithmique $X^{\dagger} := \frac{DX}{X}$.

Proposition 2.4 *Soit $\langle K, D, v, t\rangle$ un corps D-valué discret et $\langle L, D\rangle$ une extension de $\langle K, D\rangle$. Alors $\langle L, D\rangle$ admet une D-valuation w tel que $\langle L, D, w, t\rangle$ est une extension non ramifiée de $\langle K, D, v\rangle$ (et donc $w(t) = 1$) si et seulement si $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}]$.*

($\to$) Soit $\mathcal{O}_{L,w}$ un anneau de valuation tel que $\langle L, D, w\rangle$ satisfait $w(t) = 1$. Alors par le lemme 2.3, $\gamma(L) \subset \mathcal{O}_{L,w}$ et puisque w est une D-valuation, on a $(L)^{\dagger} \subset \mathcal{O}_{L,w}$, ce qui implique $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}] \subset \mathcal{O}_{L,w}$. Puisque $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_{L,w}$, on obtient $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}]$.

($\leftarrow$) Supposons $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}]$ alors $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}] \cap K$. Par la remarque 1, puisque $t \in \mathcal{O}_K$, on a que $\frac{1}{t}$ n'est pas entier sur $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}]$. Par le lemme 2.2, il existe une valuation w de L tel que $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}] \subset \mathcal{O}_{L,w}$ et $t \in \mathcal{M}_{L,w}$. Puisque $\gamma(L) \subset \mathcal{O}_{L,w}$ le lemme 2.3 implique que $w(t) = 1$ et, $(L)^{\dagger} \subset \mathcal{O}_{L,w}$ implique que c'est une D-valuation sur L.

Proposition 2.5 *Soit $\langle K, D, v, t\rangle$ un corps D-valué discret et $\langle L, D\rangle$ une extension de $\langle K, D\rangle$ tel que L possède une D-valuation non ramifiée au-dessus de K. Soient $a \in L$ et $S \subset L \setminus K$. Alors $w(a) \geq 0$ pour toute valuation de L non ramifiée au-dessus de K tel que $w(S) \geq 0$ si et seulement si a est entier sur $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}], S_T$ où $T := \{1 + ma : m \in \mathcal{M}_K,\ a \in \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}, S]\}$.*

Puisque $\langle L, D\rangle$ possède une D-valuation non ramifiée au-dessus de $\langle K, D, v, t\rangle$. Alors $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}]$ et donc $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}] \cap K = \mathcal{O}_K$. Nous pouvons ainsi appliquer le lemme 2.2, et l'on obtient que a est entier sur $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}, S]_T$ si et seulement si pour toute valuation w de L avec $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^{\dagger}] \subset \mathcal{O}_{L,w}$, on a $a \in \mathcal{O}_{L,w}$. Par le lemme 2.3 et puisque $(L)^\dagger \subset \mathcal{O}_{L,w}$, c' est équivalent à ce que la valuation de L soit une D-valuation non ramifiée sur L tel que $S \subset \mathcal{O}_{L,w}$.

Lemme 2.6 *(See [7]) Soit $\langle K, v, t\rangle$ un corps valué hensélien discret ($v(t) = 1$). Alors $\gamma(K) = \mathcal{O}_K$.*

Jusqu' la fin de cette section, nous allons supposer que K est le corps D-valué des séries de Laurent sur un corps différentiellement clos $\mathbf{k}$.

On va dans la suite considérer l'anneau des polynômes différentiels (ou D-polynômes) sur K, noté $K\{\underline{X}\}$ ainsi que son corps de fractions $K\langle\underline{X}\rangle$.

Du lemme 2.6, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.7 *Soient $\langle L, D, w\rangle$ une extension du corps D-valué discret au-dessus de $\langle K, D, v, t\rangle$ tel que $w(t) = 1$ et a un élément de L. Alors $w(a) \geq 0$ pour toute D-valuation discrète de L au-dessus de K si et seulement si a est entier sur $\mathbb{Z}[\gamma(L), (L)^\dagger]_T$.*

Grâce aux résultats dans [6], nous savons que la théorie $Th(\langle \mathbf{k}((t)), \mathcal{D}, D, t\rangle)$ est modèle complète dans le language $\mathcal{L} := \{+, -, ., 0, 1, \mathcal{D}, D, t\}$ où $\mathcal{D}$ est un symbole de relation binaire de divisibilité linéaire pour la valuation, D est une fontion qui sera interprétée comme la dérivation et t est une constante interprétée comme un élément de valuation minimale positive.

Afin d'appliquer les précédents résultats au corps différentiel $K\langle\underline{X}\rangle$, nous devons montrer que $\langle K\langle\underline{X}\rangle, D\rangle$ possède une D-valuation non ramifiée sur $\langle K, D, v, t\rangle$. Pour cela, il suffit de considérer une $\mathcal{L}$-extension élémentaire suffisamment saturée de K que l'on note L ; et on voit aisément par saturation de L, qu'il existe des lments x_l dans L ($l \in \{1, \ldots, n\}$) tel que les $D^{(i)}x_l$ sont algébriquement indépendants sur K.

Définition 2.8 *Soit $\langle K, D, v\rangle$ un corps D-valué, $r \in K\langle\underline{X}\rangle$ et S une partie finie de $K\langle\underline{X}\rangle \setminus K$. On dit que r est à valeurs S-entières, si pour tout $a \in K^n$ ou bien $r(a)$ n'est pas défini ou bien $v(r(a)) \geq 0$ dès que $\forall s \in S$, $s(a)$ est ou bien non défini ou bien $v(s(a)) \geq 0$.*

Théorème 2.9 *Soient $\langle K, D, v, t\rangle$ un modèle de la $\mathcal{L}$-théorie de $k((t))$, $r \in K\langle\underline{X}\rangle$ et S une partie finie de $K\langle\underline{X}\rangle \setminus K$. Alors r est à valeurs S-entières si et seulement si r est entier sur $\mathbb{Z}[\gamma(K\langle\underline{X}\rangle), (K\langle\underline{X}\rangle)^\dagger, S]_T$*

Par la Proposition 2.5 et puisqu'on a vu qu'il existe une D-valuation discrète de $K\langle\underline{X}\rangle$ au-dessus de K, on obtient le résultat. Pour cela, il suffit d'étendre $K\langle\underline{X}\rangle$ en un modèle de la $\mathcal{L}$-théorie de K et utiliser la modèle-complétude pour obtenir une contradiction.

A dtailler

Corollaire 2.10 *Sous les mêmes hypothse que prcdemment, on obtient :*

(i) ($S = \emptyset$) r est valeurs S-entires sur K si et seulement si r est entier sur $\mathbb{Z}[\gamma(K\langle\underline{X}\rangle), (K\langle\underline{X}\rangle)^\dagger]_T$;

(ii) ($S = \{\underline{X}\}$) r est valeurs S-entires sur $\mathcal{O}_K$ si et seulement si r est entier sur $\mathbb{Z}[\underline{X}, \gamma(K\langle\underline{X}\rangle), (K\langle\underline{X}\rangle)^\dagger]_T$;

3. Théorème différentiel de Greenberg

Soit $\langle A, D\rangle$ un anneau différentiel de caractéristique nulle qui soit un anneau de valuation tel que $D(\mathcal{M}_A) \subset \mathcal{M}_A$ et induit une dérivation δ sur le corps résiduel de caractéristique nulle. On dsignera aussi par $A\{\underline{X}\}$ l'anneau des D-polynômes coefficients sur A en les indtermines diffrentiels $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)$.

Définition 3.1 *On dit que A est D-hensélien si pout tout $f \in A\{\underline{X}\}$ donné par $f(X_0, \ldots, X_n) \in A[X_0, \ldots, X_n]$ (i.e. $f = f(X, DX, \ldots, D^{(n)}X)$) et pour tout $y \in A$ tel que $f(y)$ soit non inversible mais $\frac{\partial f}{\partial X_i}(y, Dy, \ldots D^{(n)}y)$ soit inversible, il existe alors $x \in A$ tel que $f(x) = 0$ et $x - y$ est non inversible.*

Par la Proposition 6.1 dans [9], le corps D-valué $\mathbf{k}[[t]]$ est D-hensélien où $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$ est un corps diffrentiellement clos. En pratique, on a besoin d'avoir assez de constantes dans l'anneau A pour vérifier cela ; plus précisément tout élément de A soit de la forme $u \cdot b$ où u est inversible et $Db = 0$. Dsormais nous allons supposer que tous les anneaux diffrentiels ont « assez de constantes ».

Soit $\langle A, D\rangle$ un anneau de valuation différentiel discret qui soit D-hensélien. Soit t un paramètre uniformisant de A (tel que $Dt = 0$ par la remarque précédente).

Soient A^* un ultrapuissance sur $\mathbb{N}$, $k^* = A^*/(t)$ et $\mathbb{Z}^*$ les ultrapuissances correspondantes de $k := A/(t)$ et de $\mathbb{Z}$ ainsi que v^* la valuation de A^* dans $\mathbb{Z}^*$. Soit H un sous-groupe convexe de $\mathbb{Z}^*$ contenant $\mathbb{Z}$ et $I_H := \{x \in A^* : v^*(x) \notin H\}$ qui est un idéal différentiel par la précédente remarque.

Posons dès lors $A^H := A^*/I_H$ qui est un anneau différentiel, la projection naturelle $\pi : A^* \to A^H$ et l'injection naturelle $A \hookrightarrow A^*$.

Lemme 3.2 *Sous les précédentes hypothèses, l'anneau différentiel A^H se relève en un sous-anneau différentiel de A^*, i.e. il existe un homomorphisme d'anneaux différentiels $\psi : A^H \to A^*$ tel que $\psi_{|A} = id$ et $\pi \circ \psi = id_{A^H}$.*

Remarquons de suite que $I_H \cap A = (0)$. On suit de près la preuve de [4]. Soit A_0 un D-sous-anneau de A^* maximal par rapport à la propriété $x \in A_0 \to v^*(x) \in H$. Alors $\langle A_0, D\rangle$ est isomorphe à $\langle A^H, D\rangle$ via $x \to \pi(x)$. Ce morphisme diffrentiel est clairement injectif et on suppose afin d'aboutir à une contradiction que ce n'est pas surjectif.

Soit $a^* \in A^*$ tel que $v(a^*) \in H$ et $v(a^* - a_0) \in H$ pour tout $a_0 \in A_0$. Considérons un D-polynôme $G(X)$ à coefficients dans A_0 avec degré total minimal tel que $v^*(G(a^*)) > H$ (par maximalité de A_0 il y a un tel G). Ainsi pour tout $H(X)$ de degré total inférieur on a $0 < v^*(H(a^*)) \in H$. Soit w^* la coarse valuation de v^* par rapport à H alors en appliquant les lemmes 8.3 et 8.4 de [10], le corps de fractions K^* de A^* muni de la valuation v^* satisfait cette version plus forte du lemme de Hensel :

pout tout $f \in \mathcal{O}_{K^*}\{\underline{X}\}$ et pour tout $y \in A$ tel que $v^*(f(y)) > 2v^*(\frac{\partial f}{\partial X_i}(y))$ pour un certain i alors il existe $x \in A^*$ tel que $f(x) = 0$ et $v^*(x - y) \geq v^*(f(y)) - v^*(\frac{\partial f}{\partial X_i}(y))$.

D'où il existe un élément $b \in A^*$ tel que $G(b) = 0$ et $w^*(b - a^*) > H$; i.e. $\pi(a^*) = \pi(b)$. Ainsi pour tout $y \in A_0\{b\}$, on a $v^*(y) \in H$. On en conclut que $b \in A_0$ ce qui contredit le fait que $v^*(a^* - b) > H$.

En suivant la preuve du Thorme 2.1 dans [3], on prouve le théoréme suivant

Théorème 3.3 *Soit $\langle A, D\rangle$ un anneau différentiel de valuation discrète qui est D-hensélien. Soit t un paramètre uniformisant de A, soient $f := (f_1, \ldots, f_m) \subset A\{\underline{X}\}$. Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de f) tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{>0}$, pour tout $\underline{x} \in A$ tel que $f(\underline{x}) = 0 \mod t^{\alpha N}$, il existe $\underline{y} \in A$ tel que $f(\underline{y}) = 0$ et $\underline{y} = \underline{x} \mod t^{\alpha}$.*

Nous allons prouver maintenant une version plus faible de ce théorème qui est l'analogue pour $\mathbf{k}[[t]]$ du Théorème 2.1 dans [2].

Théorème 3.4 *Si pour tout entier $N \geq 1$, il existe $\underline{y}$ dans $\mathbf{k}[[t]]$ tel que $f_i(\underline{y}) = 0 \mod t^N$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ alors il existe $\underline{x}$ in $k[[t]]$ tel que $f_i(\underline{x}) = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Considérons la situation du précédent lemme avec les mêmes notations où A est égal à $\mathbf{k}[[t]]$ et H est le sous-groupe convexe de $\mathbb{Z}^*$ qui est la clôture convexe de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}^*$.

Par la saturation de A^*, il existe un élément $\underline{b}$ dans A^* tel que $v^*(f(\underline{b})) > H$. En d'autres mots, puisque $A \hookrightarrow A^H$, on a $f(\pi_H(\underline{b})) = 0$ dans A^H. Puisque A est D-hensélien, on applique le précédent lemme et on obtient un homomorphisme différentiel $\psi : A^H \to A^*$. On en déduit $0 = \psi(f(\pi_H(\underline{b}))) = f(\psi(\pi_H(\underline{b}))) = 0$. On a donc obtenu un zéro $\psi(\pi_H(\underline{b}))$ de f dans A^* et il suffit d'utiliser $A \prec A^*$.

Définition 3.5 *Soit $\langle K, D, v\rangle$ un corps D-valué et $r \in K\langle\underline{X}\rangle$. On dit que r est régulière sur $\mathcal{O}_K$ s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $v(r(\underline{a}) \geq v(\lambda)$ $\forall a \in \mathcal{O}_K$ où $r(\underline{a})$ est défini.*

La proposition suivante se déduit directement du Lemme Faire les dtails car diffrents de l'article de Blair.

Proposition 3.6 *Soit $\langle K, D, v\rangle = \langle k((t)), D_t, v_t\rangle$, soient $r \in K\langle\underline{X}\rangle$, $\Lambda = \mathbb{Z}[\underline{X}, \gamma(K\langle X\rangle), (K\langle X\rangle)^\dagger]$ et l'anneau de fractions $R = \Lambda[(1 + t\Lambda)^{-1}]$. Alors r est régulière sur $\mathcal{O}_K$ si et seulement si r est entier sur l'anneau $R \cdot K$.*

Le lemme suivant se déduit aisément du Théoréme 3.4.

Lemme 3.7 *Soit $\langle K, D, v\rangle$ comme dans la précédente proposition et h dans $K\langle\underline{X}\rangle$. Alors h n' a aucun zéro dans $\mathcal{O}_K$ si et seulement si h^{-1} est réguliére sur $\mathcal{O}_K$.*

Nous pouvons maintenant prouver comme dans [2] un Théorème des zéros pour le corps D-valué $\mathbf{k}[[t]]$.

Théorème 3.8 *Soit K et R comme dans la précédente proposition et soient $f_1, \ldots, f_m$ dans $K\langle\underline{X}\rangle$. Si*

$f_1, \ldots, f_m$,n'ont aucun zéro commun dans $\mathcal{O}_K$ alors $(f_1, \ldots, f_m)_{R\cdot K\langle \underline{X} \rangle} = R\cdot$ où $(f_1, \ldots, f_m)_{R\cdot K\langle \underline{X} \rangle}$ est l'idéal engendré par les f_i dans l'anneau $\Lambda \cdot K\langle \underline{X} \rangle$.
reprendre la preuve de Bélair

Ecrire alors un truc sur la notion d'idéal t-adique

Remerciements. Je tiens à remercier Belair Scanlon

Références

[1] L. Bélair

[2] L. Bélair, Equations aux différences dans les vecteurs de Witt, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005), pp. 99–102.

[3] J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz and L. van den Dries, Ultraproducts and approximation in Local rings, Inventiones math. 51 (1979), pp. 189–203.

[4] L. Bélair, A. Macintyre, T. Scanlon, Model theory of Witt wectors with Frobenius

[5] Greenberg

[6]

[7]

[8]

[9] T. Scanlon, A modele complete theory of D-valued fields

[10] T. Scanlon, Quantifier elimination for the Relative Frobenius,