JANVIER 2004

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

Rappelons que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \ : \ a, \ b \in \mathbb{Z}\}$
On sait que $GL_3(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices 3×3, inversibles, à coefficients complexes, muni de la multiplication matricielle est un groupe.

$$\text{Soit } G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ x, \ y, \ z \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

1. Prouver que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$.

2. Calculer $Z(G)$, le centre de G.

3. Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

   (a) Prouver que les conjugués de g (c'est-à-dire les éléments de la forme $h^{-1}gh$ avec $h \in G$) sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & z + \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \ \beta \in \mathbb{Z}[i]$.

   (b) Réciproquement, prouver que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & z + \alpha x + \beta y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \ \beta \in \mathbb{Z}[i]$ est un conjugué d'un élément de G.

4. Soit $g, \ h \in G$

   (a) Prouver que le commutateur de g et h, $[g, h]$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\xi \in \mathbb{Z}[i]$.

   (b) Réciproquement, prouver que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\xi \in \mathbb{Z}[i]$ est le commutateur de deux éléments de G.

5. (a) Prouver que $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{Z}[i] \right\}$ est un sous-groupe de G.

   (b) Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{Z} \right\}$, prouver que $\langle L/H, \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, + \rangle$