Examen d'algèbre JUIN 2004
Correction de la partie I

Pour prouver que $\mathcal{O}_{S_n(i)} = E_n$, on va montrer deux inclusions. Clairement $\mathcal{O}_{S_n(i)} \subseteq E_n$ (par définition de $\mathcal{O}_{S_n(i)}$). Reste à prouver que $\mathcal{O}_{S_n(i)} \supseteq E_n$. Remarquons d'abord que pour i fixé l'ensemble des transpositions permutant i[1] $\{(ij) \mid i,j \in E_n\}$ est un sous ensemble de S_n. On peut donc clairement l'inclusion suivante:

$$\mathcal{O}_{S_n(i)} = \{\sigma(i) \mid \sigma \in S_n\} \supseteq \{(ij)\,(i) \mid i,j \in E_n\}$$

Cependant $\{(ij)\,(i) \mid i,j \in E_n\} = \{j \mid j \in E_n\} = E_n$ (ce qui répond a la question (1.)).

On sait (vu au cours) que si $g \in G$ alors l'application $\sigma_g : G \to G$ tel que $\sigma(x) = gxg^{-1}$ est un automorphisme de G (appelé *automorphisme interne*), c'est donc un isomorphisme.

Si H est un sous-groupe de G le morphisme σ_g restreint à H (noté $\sigma_g{\restriction}_H$) est toujours un morphisme bijectif??? injectif??? L'image de H par $\sigma_g{\restriction}_H$ est $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$, c'est à dire $H^g \subseteq G$, on sait que l'image d'un groupe par un morphisem est un sous-groupe de G, donc $H^g < G$. Ceci prouve (3.a???) car $\sigma_g{\restriction}_H$ est un isomorphisme entre H et H^g.

On remarque que $H^g = gHg^{-1}$. Donc si pour tout $g \in G$, on a $H^g = H$, on a pour tout $g \in G$ $H = gHg^{-1}$ ou encore $Hg = gH$, c'est à dire que H est un sous-groupe normal de G.
Réciproquement si pour tout $g \in G$, on a $Hg = gH$, on a $H = gHg^{-1}$ ($= H^g$ par définition) (L'égalité des ensembles par multiplication par un élément du group est conservée). Donc on peut conclure que si H est sous-groupe normal de G, alors pour tout $g \in G$ $H = H^g$. Ceci prouve (3.c).

Si on a prouvé que $St(n) < S_n$, on sait que $St(n)$ est l'ensemble des permutations de S_n fixant le $n$ième élément, ce sous-groupe est naturellement isomorphe à S_{n-1} via l'isomporphisme $\pi : St(n) \to S_{n-i}$ défini comme suit:

$$\pi(\sigma) = \sigma{\restriction}_{E_{n-1}}.$$

D'autre part $St(j) = (St(i))^{(ij)}$ (car $\sigma \in St(j)$ si et seulement si $(ij)\sigma(ij) \in St(i)$) (ceci répond à (3.e)), et donc par (3.a) $St(i)$ est isomorphe à $St(j)$ et $St(i) = (St(n))^{(ni)}$ est isomorphe à S_{n-1}. Par composition des isomorphismes, on a $St(i) \cong St(n) \cong S_{n-1}$, on a donc montré (3.f).

Par (3.c) puisque clairement $St(1) \neq St(2)$ (vu que $(13) \in St(2) \setminus St(1)$) et que $St(1) = (St(2))^{(12)}$, on a que $St(i)$ n'est pas un sous-groupe normal de Sn (ce qui répond à (2.b)).

D'autre part si on a montré que $St(n)$ est un sous-groupe de S_n alors par (3.a) et (3.e) on aura que $St(i)$ est un sous-groupe de S_n car $St(i) = (St(n))^{(ni)}$ (ce qui répond à (2.a)). Pour montrer que $St(n)$ est un sous-groupe de S_n on remaque que $St(n)$ est l'image de S_{n-1} par le monomorphisme $\tilde{\pi} : S_{n-1} \to S_n$ tel que $\tilde{\pi}(\sigma)$ est la permutation qui a le même comportement sur E_{n-1} et qui laisse fixe n.

[1] Si $i = j$ la transpostion est en fait la permutation identité, on tolerera cet abus de langage et de notation.

Pour terminer, prouvons (3.b) et (3.d). Clairement,

$$\begin{aligned}
(H^{g_1})^{g_2} &= \{g_2 h' g_2^{-1} \mid h' \in H^{g_1}\} && \text{par définition de } H^g \\
&= \{g_2 g_1 h g_1^{-1} g_2^{-1} \mid h' \in H^{g_1}\} && \text{par définition de } H^{g_1} \\
&= \{g_2 g_1 h (g_2 g_1)^{-1} \mid h' \in H^{g_1}\} && \\
&= H^{g_2 g_1} && \text{par définition de } H^g
\end{aligned}$$

Ce qui prouve (3.b). En particulier, si $H^{g_1} = H$ et $H^{g_2} = H$, on a evidement que $H^{g_1 g_2} = (H^{g_2})^{g_1} = H^{g_1} = H$. De même on a $H^1 = H$ et $H^{gg^{-1}} = H$, donc si $H^g = H$, on a $H^{g^{-1}} = (H^g)^{g^{-1}} = H^{g^{-1}g} = H^1 = H$. Ceci montre que $N_H = \{g \in G \mid H^g = H\}$ est un sous-groupe de G (vu que l'on vient de vérifier les hypothèses du critère du sous-groupe). De plus, si $h \in H$, on a que $H^h = H$ (car $hH = Hh$). Donc $H \subseteq N_H$ et vu (2.c), on a (par définition de N_H) que H est sous-groupe normal de N_H.