Examen d'algèbre - Partie groupes
JUIN 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit $n \geq 4$, $E_n = \{1, ..., n\}$, soit S_n et S_{n+3} les groupes de permutations sur respectivement E_n et E_{n+3}. Soit σ l'application définie de E_{n+3} dans E_{n+3} par

$$\sigma(j) = \begin{cases} n+j & \text{si } j \in \{1, 2, 3\} \\ j & \text{si } j \in \{4, ..., n\} \\ j-n & \text{si } j \in \{n+1, n+2, n+3\} \end{cases}$$

   Soit $p \in S_n$, on définit la fonction $\bar{p}$ suivante:

$$\bar{p} = \sigma p \sigma^{-1}.$$

   (a) Pour $n = 4$, pour $p_1 = (1234)$ et $p_2 = (12)(34)$, calculer $\bar{p}_1$ et $\bar{p}_2$.

   (b) Prouver que $\bar{p} \in S_{n+3}$.

   (c) Prouver que l'application φ de S_n dans S_{n+3} définie par $\varphi(p) = \bar{p}$ est un morphisme. Est-il injectif? Calculer son noyau.

2. Soit $G = S_3 \times S_3$ le produit direct du groupe S_3 avec lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des couples d'éléments de S_3 muni de la loi de groupe de S_3 composante par composante.

   (a) Quel est l'ordre de G? Est-il commutatif?

   (b) Trouver un sous-groupe de G d'ordre 2.

   (c) Trouver un sous-groupe de G d'indice 2. Est-il normal?

   (d) Trouver un sous-groupe normal de G d'indice 4. Décrire explicitement le quotient de G par ce sous-groupe.

   (e) Soit ψ l'application de G dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $\psi\big((p_1, p_2)\big) = \big(\epsilon(p_1), \epsilon(p_2)\big)$ où $\epsilon(p) = 0$ si p est paire, $\epsilon(p) = 1$ si p est impaire. Prouver que ψ est un épimorphisme de groupes. Calculer son noyau.