Informatique théorique
Bases du raisonnement logique (brouillon)

1 Introduction

Nous présentons quelques règles permettant de faciliter la preuve de jugements de la forme $\Gamma \models A$.

Il est important de les comprendre, de savoir les démontrer, et surtout de voir que leur connaissance permet d'articuler des raisonnement "semi-formels" (convaincants, mais restant lisibles par un être humain).

Ces règles se retrouvent fréquemment sous la forme de "règles de déduction" permettant de prouver des "séquents" $\Gamma \vdash A$, mais nous ne prévoyons pas d'exposer la *théorie de la démonstration* dans cette U.E.

On classifie les règles suivant deux critères principaux :

- Règles d'introduction/ règles d'élimination
- Règles de base / règles "dérivées"

1.1 Comment lire une règle

Soit une règle de la forme :

Si $\Gamma_1 \models A_1$, $\Gamma_2 \models A_2$ ...**et** $\Gamma_n \models A_n$ **alors** $\Gamma \models A$

La lire de la droite vers la gauche donne :

> Pour montrer $\Gamma \models A$, il suffit de montrer $\Gamma_1 \models A_1$, $\Gamma_2 \models A_2$ ..., et $\Gamma_n \models A_n$.

1.2 Utilisation pratique

En langage courant, prouver une implication sémantique $A_1, A_2, \ldots A_n \models A$ revient à prouver la proposition A, *sous les hypothèses* A_1, A_2, ..., A_n.

2 Logique Propositionnelle

2.1 Règle d'assomption

Si $A \in \Gamma$, **alors** $\Gamma \models A$

2.2 Règles pour l'implication

2.2.1 Modus ponens (élimination de l'implication

Si $\Gamma \models A \Rightarrow B$ **et** $\Gamma \models A$, **alors** $\Gamma \models B$

2.2.2 Introduction de l'implication

Si $\Gamma, A \models B$ **alors** $\Gamma \models A \Rightarrow B$

2.3 Règles pour la conjonction

2.3.1 Introduction de la conjonction

Si $\Gamma \models A$ **et**$\Gamma \models B$ **alors** $\Gamma \models A \wedge B$

2.3.2 Élimination de la conjonction

Si $\Gamma, A, B \models C$ **alors** $\Gamma, A \wedge B \models C$

2.3.3 Élimination de la conjonction (régle dérivée)

Si $\Gamma \models A \wedge B$ **alors** $\Gamma \models A$

2.3.4 Élimination de la conjonction (régle dérivée)

Si $\Gamma \models A \wedge B$ **alors** $\Gamma \models B$

2.4 Règles pour la disjonction

2.4.1 Introduction de la disjonction

Si $\Gamma \models A$ **alors** $\Gamma \models A \vee B$

2.4.2 Introduction de la disjonction

Si $\Gamma \models B$ **alors** $\Gamma \models A \vee B$

2.4.3 Élimination de la disjonction ("preuve par cas")

Si $\Gamma \models A \vee B$, **si** $\Gamma, A \models C$, **et** $\Gamma, B \models C$ **alors** $\Gamma \models C$

2.5 Règles pour l'équivalence logique

On peut toujours supposer que $A \Leftrightarrow B$ est une abréviation de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Une règle dérivée importante est la suivante :

2.5.1 Élimination de l'équivalence logique

Si $\Gamma \models A \Leftrightarrow B$, **et** $\Gamma \models C$, alors $\Gamma \models C[A/B]$.

2.6 Le faux et la négation

On considère une proposition souvent notée $\perp$, fausse pour n'importe quelle valuation. On peut toujours considérer la négation $\neg A$ comme une abréviation de $A \Rightarrow \perp$.

2.7 Élimination du faux

Si $\Gamma \models \bot$, **alors** $\Gamma \models A$, *quelle que soit la proposition* A

2.7.1 Introduction de la négation

Si $\Gamma, A \models \bot$, **alors** $\Gamma \models \neg A$

2.7.2 Élimination de la négation ("raisonnement par l'absurde")

Si $\Gamma, \neg A \models \bot$, **alors** $\Gamma \models A$

2.7.3 Élimination de la négation (règle dérivée)

Si $\Gamma \models A$, **alors** $\Gamma, \neg A \models B$ *quelle que soit la proposition* B

2.7.4 Élimination de la négation (règle dérivée)

Si $\Gamma \models \neg A$, **alors** $\Gamma \models A \Rightarrow B$

3 Quelques règles dérivées utiles

La liste suivante n'est pas exhaustive, et pourra être complétée.

3.0.5

Si $\Gamma \models A \vee B$ **et** $\Gamma \models \neg A$ **alors** $\Gamma \models B$

3.0.6

Si $\Gamma \models A \vee B$ **et** $\Gamma \models \neg B$ **alors** $\Gamma \models A$

3.0.7 Contraposée

Si $\Gamma \models A \Rightarrow B$ **alors** $\Gamma \models \neg B \Rightarrow \neg A$

3.0.8

$\models (A \vee \bot) \Leftrightarrow A$

3.0.9 Raisonnement par cas, utilisant le tiers exclu

Si $\Gamma, A \models B$, **et** $\Gamma, \neg A \models B$ **alors** $\Gamma \models B$

3.0.10

Si $\bot \in \Gamma$ **alors** $\Gamma \models A$ *quelle que soit la proposition* A

3.0.11

$\models (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

3.0.12

$\models \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

3.0.13 Double négation

$\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$

3.0.14

$\models \neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

3.0.15 Affaiblissement

Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et $\Gamma \models A$, **alors** $\Gamma' \models A$

4 Premier ordre

4.1 Introduction du quantificateur universel

Pour prouver $\Gamma \models \forall x : U \,.\, p(x)$ il suffit de prouver $p(x)$ où x est une variable n'apparaissant pas libre dans Γ.

En notation semi-formelle, une telle preuve a pour structure :

`Soit` $x : U$ `quelconque,`
  une preuve de $p(x)$
■

4.2 Élimination du quantificateur universel

Si $\Gamma \models \forall x : U, p(x)$ alors $\Gamma \models \forall x : U \,.\, p(t)$, où t est un terme de type U.

Le remplacement de x par t dans la formule $p(x)$ ne doit pas provoquer de capture de variable par un quantificateur.

4.3 Introduction du quantificateur existentiel

Si $\Gamma \models p(t)$, où t est un terme de type U, alors $\Gamma \models \exists x : U \,.\, p(x)$.

Le remplacement de x par t dans la formule $p(x)$ ne doit pas provoquer de capture de variable par un quantificateur.

4.4 Élimination du quantificateur existentiel

Si $\Gamma \vDash \exists x : U \,.\, p(x)$, pour prouver $\Gamma \vDash Q$ il suffit de prouver $p(x) \Rightarrow Q$ *où* x *est une variable n'apparaissant pas libre dans* $\Gamma \cup Q$

En notation semi-formelle, une telle preuve a pour structure :

On suppose ou on a prouvé $\Gamma \vDash \exists\ x : U\ .\ p(x)$

Soit $x : U$ quelconque tel que $p(x)$
  une preuve de Q
■

On en en déduit Q.