Informatique théorique : feuille numéro 3
Relations

Meta-exercice : Illustrer chacune des définitions par un exemple simple, ainsi qu'un contre-exemple s'il y a lieu.

Définitions

1. Une relation R entre les ensembles E et F est juste un ensemble de $E \times F$, en bref $R \subseteq E \times F$, ou si l'on préfère $R \in \mathcal{P}(E \times F)$
   Si $R \subseteq E \times E$, on dit que R est *homogène*.
   L'appartenance $(x, y) \in R$ est traditionellement notée $x\,R\,y$.
2. Une relation étant toujours un ensemble, toutes les opérations sur les ensembles s'appliquent aux relations :
   – $R \subseteq S$ (on dit que R est plus fine que S (S est plus grossière que S.))
   – $R \cup S$, $R \cap S$, $R \backslash S$, $\emptyset$, $\bigcup_{i \in I} R_i$, $\bigcap_{i \in I} R_i$, etc.
3. En revanche, certaines définitions et notations ne s'appliquent qu'aux relations. Soit R une relation de E vers F :

   identité : Soit E un ensemble ;

   $$Id_E =_{\text{def}} \{(x, x) \mid x \in E\}$$

   Relation réciproque :

   $$R^{-1} =_{\text{def}} \{(y, x) : F \times E \mid (x, y) \in R\}$$

   Composition : soient R une relation entre E et F, et S une relation entre F et G ;

   $$R; S =_{\text{def}} \{(x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F \,.\, x\,R\,y \wedge y\,S\,z\}$$

   domaine :

   $$\text{dom}(R) =_{\text{def}} \{x \in E \mid \exists y \in F \,.\, xRy\}$$

   codomaine (range) :

   $$\text{ran}(R) =_{\text{def}} \{y \in F \mid \exists x \in E \,.\, xRy\}$$

   restriction : Soit $G \subseteq E$ un ensemble.

   $$G \lhd R =_{\text{def}} \{(x, y) \in R \mid x \in G\}$$

   co-restriction : Soit H un sous-ensemble de G.

   $$R \rhd H =_{\text{def}} \{(x, y) \in R \mid y \in H\}$$

relation fonctionnelle R est dite *fonctionnelle* si la propositon suivante est vraie :

$$\forall x \in E, \forall y, z \in F, x\, R\, y \wedge x\, R\, z \Rightarrow y = z$$

On dit aussi que R est une *fonction partielle* de E vers F.

4. Les définitions suivantes s'appliquent uniquement aux relations homogènes sur un ensemble E :
   – R est *réflexive* si pour tout x dans E, $x\, R\, x$
   – R est *symétrique* si pour tous x et y dans E, si $x\, R\, y$, alors $y\, R\, x$ (de façon équivalente : $R \subseteq R^{-1}$)
   – R est *transitive* si pour tous x, y et z dans E, si $x\, R\, y$ et $y\, R\, z$, alors $xy\, R\, z$ (de façon équivalente : $R\,;\, R \subseteq R$)
   – On définit les *itérés* de R par :

$$\begin{array}{rcl} R^0 & =_{\text{def}} & Id_E \\ R^{n+1} & =_{\text{def}} & R\,;\; R^n \end{array}$$

   – On définit la *fermeture transitive* de R par :

$$R^+ =_{\text{def}} \bigcup_{i \geq 1} R^i$$

   – … la *fermeture réflexive et transitive* de R par :

$$R^* =_{\text{def}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^i$$

   – … et la *fermeture réflexive, symétrique et transitive* de R par :

$$R^* =_{\text{def}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (R \cup R^{-1})^i$$