

Informatique théorique : feuille numéro 4

Relations (suite)

1

On peut représenter tout graphe dirigé G par un ensemble V de sommets et une relation binaire $A \subseteq V \times V$ (*relation d'adjacence*). On dit aussi que A est l'ensemble des *arcs* de G .

1. Prendre un exemple simple de graphe et énumérer sa relation d'adjacence.
2. En utilisant le vocabulaire des relations (vu dans la fiche précédente), exprimer les propriétés ou notions suivantes :
 - G est fortement connexe
 - G est acyclique
 - G est un arbre et r est sa racine
 - L'ensemble des sommets accessibles à partir de v
 - L'ensemble des sommets co-accessibles à partir de v

2

Pour chacune des relations suivantes, déterminer — si cela a un sens —

1. si elle est fonctionnelle
2. si elle est réflexive, symétrique et/ou transitive
3. ses fermetures transitive, réflexive et transitive, réflexive, symétrique et transitive.
 - $<$ sur \mathbb{N}
 - $|$ (divise) sur \mathbb{N}
 - \subseteq sur $\mathcal{P}(A)$ (A étant un ensemble)
 - “avoir au moins un caractère commun” sur l'ensemble des chaînes de caractères
 - “être composées des mêmes caractères” sur l'ensemble des chaînes de caractères

3

Soit R une relation symétrique et transitive sur un ensemble A . Le raisonnement suivant est-il correct ?

1. Soient $x, y \in A$,
2. comme R est symétrique, $x R y \Rightarrow y R x$
3. comme R est transitive, $x R y \wedge y R x \Rightarrow x R x$
4. donc $x R x$

R est donc réflexive.

4

Soit R une relation sur A ;

1. Montrer que R^+ est transitive
2. Montrer que R^* est réflexive et transitive
3. Montrer que R^+ est la plus fine des relations transitives plus grossières que R
4. Même question (ou presque) pour R^*
5. Montrer que R est transitive si et seulement si $R^+ = R$
6. La question précédente s'applique-t-elle à la relation \emptyset ?

5

On considère dans cet exercice l'ensemble des relations sur un ensemble A ;
Simplifier les expressions suivantes :

1. \emptyset^*
2. $(R^+)^+$
3. $(R^*)^*$
4. $(((((R^*)^*)^*)^*)^*)^*)^*$

6

On considère dans cet exercice l'ensemble des relations sur un ensemble A ;
Les égalités suivantes sont-elles valides ?

1. $(R \cup S)^* = R^* \cup S^*$
2. $(R^*; S^*)^* = (R \cup S)^*$