Informatique théorique : feuille numéro 5
Relations d'ordre

Définitions

Si R est une relation, $R \subseteq \mathcal{P}(E \times E)$, on dira que :

- R est *irréflexive* si pour tout x dans E, $\neg\, x\, R\, x$
- R est *antisymétrique* si pour tous x et y dans E, si $x\, R\, y$ et $y\, R\, x$, alors $x = y$.

Soit R une relation sur l'ensemble E.

1. R est un *préordre* si R est réflexive et transitive.
2. R est une *relation d'ordre* si R est un préordre et R est antisymétrique.
3. R est un *ordre strict* si R est transitive et irréflexive.

Si pour une relation d'ordre R, deux éléments sont toujours comparables,c'est-à-dire que pour tous x, y de E, $x\, R\, y$ ou $y\, R\, x$, on dit que R est une *relation d'ordre totale.*
Une relation d'ordre R qui n'est pas totale est une *relation d'ordre partiel.*

1 Exercice et/ou Examples

On considère les relations suivantes ; sont-ce des ordres partiels ? totaux ? stricts ? des pré-ordres ? aucune de ces quatre catégories ?

- La relation "divise" sur $\mathbb{Z}$
- La relation "divise" sur $\mathbb{N}$
- L'accessibilité dans un graphe
- L'accessibilité dans un graphe sans cycle
- La finesse dans l'ensemble des relations binaires de A vers B
- L'inclusion $\subseteq$ dans $\mathcal{P}(A)$
- L'ordre alphabétique sur les chaines ASCII
- L'ordre $<$ dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{R}$, etc.
- La relation "être plus courte" sur les chaînes de caractères
- Héritage simple (Java)
- La relation entre programmes : $P\ R\ Q$ si pour toute donnée d, si P ne boucle pas sur d, alors Q appliqué à d donne le même résultat que P"

2 Exercice

Soit E un ensemble, et R une relation quelconque sur E.
Montrer que si R est un ordre strict sur E, alors la relation définie par " $x\, S\, y$ si et seulement si $x\, R\, y \vee x = y$ " est une relation d'ordre.

3 Définition et Exercice

Soientt E et F deux ensembles, $\leq$ une relation d'ordre total et total sur E et $\sqsubseteq$ une relation d'ordre total sur F.

Le *produit lexicographique* de $\leq$ et $\sqsubseteq$ est la relation sur $E \times F$ définie par

$$\begin{array}{lll} (x, y)(\leq \times \sqsubseteq)_{lex}(z, t) & \text{si} & x < z \\ & \text{ou} & x = z \wedge y \sqsubseteq t \end{array}$$

Montrer que $(\leq \times \sqsubseteq)_{lex}$ est une relation d'ordre total sur $E \times F$.

4 Eléments remarquables

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur E et A un sous-ensemble de E.

1. On dit que $a \in E$ est un élément maximal (resp. minimal) de E si $\forall x \in E, a \leq x \Rightarrow x = a$ (resp. $\forall x \in E, x \leq a \Rightarrow x = a$).
2. On dit que $a \in E$ est le plus grand élément (resp. plus petit) de E si $\forall x \in E, x \leq a$ (resp. $\forall x \in E, a \leq x$)
3. Un élément m de E est un *majorant* (resp. minorant) du sous-ensemble A si pour tout $x \in A$, on a $x \leq m$ (resp. $m \leq x$). Remarque : m n'appartient pas nécessairement à A.
4. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la borne supérieure de A et noté $sup(A)$.
   De même, si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la borne inférieure de A et noté $inf(A)$.

5 Exercice

On considère la relation R définie sur $\mathbb{R}^2$ par la condition suivante : $(x, y)R(x', y')$ si, et seulement si, $x \leq x' \wedge (y \leq y')$.

1. Montrer que R est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est-il total ?
3. $(\mathbb{R}^2\ , R)$ admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
4. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, donner des exemples et contre-exemples des définitions données en 4 :
   - $\{(-2, 1), (1, 2)\}$
   - $\{(-2, 0), (-1, -3)\}$
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \wedge y > 0\}$
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee y = 0\}$
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee y^2 > 2\}$
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

6 Relations bien fondées

la relation R est *bien fondée* si et seulement s'il n'existe aucune suite infinie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ telle que $x_{i+1}\, R\, x_i$ pour tout i. On dit aussi que E est bien fondé pour la relation R.

On pourra montrer que la relation $<$ *est bien fondée sur* $\mathbb{N}$*, mais pas sur* $\mathbb{Z}$ *ni sur* $\mathbb{Q}^+$.

6.1 Théorème

On peut démontrer ou admettre le théorème suivant :

> Le produit lexicographique de deux relations bien fondées est bien fondé.

7 Exercice

Soit R une relation bien fondée sur E.

1. Montrer que R est irréflexive
2. Montrer que tout sous-ensemble $\emptyset \neq A \subseteq E$ contient au moins un élément minimal pour $\sqsubset$ (pour la relation R^+.)

8 À quoi servent les ensembles bien fondés ?

Les ensembles bien fondés servent à montrer que des programmes ne bouclent pas. Ils sont aussi la base de la technique de démonstration par *récurrence transfinie* :

- Soit $(E, <)$ un ensemble bien fondé,
- Soit P un prédicat défini sur E tel que
  - pour tout $x \in E$,
    - si $P(y)$ est vraie pour tout $y < x$,
    - alors $P(x)$ est vraie.
- Alors, on en déduit la proposition $\forall x \in E, P(x)$

9 Exercice

Montrer que la relation d'inclusion stricte sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas bien fondée.

10 Exercice

Démontrer les deux théorèmes suivants :

10.1 Théorème 1

Soient R et S deux relations sur E. Si $R \subseteq S$ et S est bien fondée, alors R est bien fondée.

10.2 Théorème 2 (de l'image réciproque)

Soient E et F deux ensembles, R une relation sur E et S une relation sur F. Soit une fonction $f : E \to F$. Si on a :

- $\forall x\, y \in E, x\, R\, y \Longrightarrow f(x)\, S\, f(y)$
- (F, S) bien fondée

Alors (E, R) est bien fondé.

10.3

Si l'on modifie l'énoncé de la façon suivante, obtient-on un théorème ? Justifier votre réponse !

> Soient E et F deux ensembles, R une relation sur E et S une relation sur F. Soit une fonction $f : E \to F$. Si on a :
> - $\forall x\, y \in E, x\, R\, y \Longrightarrow f(x)\, S\, f(y)$
> - (E, R) bien fondée
>
> Alors (F, S) est bien fondée.

11 Exercice

Parmi les deux énoncés suivants, lequel est faux ? Pourquoi ?

- Soit E un ensemble, et R et S deux relations bien fondées sur E. Alors $R \cap S$ est bien fondée.
- Soit E un ensemble, et R et S deux relations bien fondées sur E. Alors $R \cup S$ est bien fondée.