Informatique Théorique 1. Travaux Dirigés : 4

1 Exercice

Soit E un ensemble, et R une relation quelconque sur E.

1.1

Montrer que si R est un ordre strict sur E, alors la relation définie par "$x \, S \, y$ si et seulement si $x \, R \, y \vee x = y$" est une relation d'ordre.

1.2

Montrer que si R est un préordre sur E, alors la relation définie par "$x \, S \, y$ si et seulement si $x \, R \, y \wedge y \, R \, x$" est une relation d'équivalence.

2 Exercice

Montrer que la relation d'inclusion stricte sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas bien fondée.

3 Exercice

Démontrer les deux théorèmes suivants (cités en cours) :

3.1

Soient R et S deux relations sur E. Si $R \subseteq S$ et S est bien fondée, alors R est bien fondée.

3.2 Théorème (de l'image réciproque)

Soient E et F deux ensembles, R une relation sur E et S une relation sur F. Soit une fonction $f : E \to F$. Si on a :
- $\forall x \, y \in E, x \, R \, y \Longrightarrow f(x) \, S \, f(y)$
- (F, S) bien fondée

Alors (E, R) est bien fondé.

3.3

Si l'on modifie l'énoncé de la façon suivante, obtient-on un théorème ? Justifier votre réponse !

> Soient E et F deux ensembles, R une relation sur E et S une relation sur F. Soit une fonction $f : E \to F$. Si on a :
> - $\forall x \, y \in E, x \, R \, y \Longrightarrow f(x) \, S \, f(y)$

– (E, R) bien fondée

Alors (F, S) est bien fondée.

4 Exercice

Parmi les deux énoncés suivants, lequel est faux ? Pourquoi ?

- Soit E un ensemble, et R et S deux relations bien fondées sur E. Alors $R \cap S$ est bien fondée.
- Soit E un ensemble, et R et S deux relations bien fondées sur E. Alors $R \cup S$ est bien fondée.

5 Exercice

Soit A un alphabet, fini, pourvu d'un ordre strict sur les caractères.

Montrer que l'ensemble des chaînes de caractères de longueur bornée (inférieure ou égale à un entier n donné) est bien fondé pour l'ordre alphabétique strict.

(On peut donner deux preuves : on pourra utiliser ou s'inspirer de la preuve que l'ensemble des chaînes de caractères de longueur donnée est bien fondé).