Informatique Théorique 1. Travaux Dirigés : 5

1 Exercice

On considère 6 variables T, U, W, X, Y, Z, et l'ensemble $\mathcal{P}$ des formules propositionnelles formées à partir de ces variables en utilisant les connecteurs $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, et $\neg$.

On définit sur $\mathcal{P}$ les relations suivantes :

- $F\ R_1\ G$ si et seulement si l'implication $F \implies G$ est valide,
- $F\ R_2\ G$ si et seulement si l'équivalence $F \iff G$ est valide,
- $F\ R_3\ G$ si et seulement si l'implication $F \implies G$ est satisfiable,
- $F\ R_4\ G$ si et seulement si l'équivalence $F \iff G$ est satisfiable.

Parmi les relations, lesquelles sont des pré-ordres ? des relations d'ordre ? des realtions d'équivalence ?

2 Exercice

On considère la fonction de Fibonacci, sous sa forme récursive vue en cours :

```
 public static int fib(int n) {
        return n <= 1 ? 1
                      : fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

2.1

Étudier son comportement pour de petites valeurs de n : $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2.2

Montrer que le nombre d'appels à la fonction `fib` lors d'un calcul de `fib(n)` est supérieur ou égal au résultat retourné.

2.3

Montrer que si ≥ 2, alors `fib`(n) est supérieur ou égal à $2\,\mathrm{fib}(n-2)$

2.4

En déduire une minoration (en fonction de n) du nombre d'appels à la fonction `fib` nécessaire au calcul de `fib`(n).

2.5

Pour avoir un programme plus performant, on peut prouver que la valeur de `fib` n est égale au coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

2.5.1 Note

La multiplication de matrices est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cz+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

.

2.6

En déduire un algorithme de calcul de `fib` (n) qui ne demande qu'un nombre logarithmique d'additions (en fonction de n).

3 Exercice

On considère un ensemble infini de boules, tel que chaque boule porte un numéro dans $\mathbb{N}$, et que chaque entier naturel peut être représenté un nombre infini de fois.

Le jeu suivant se joue à deux joueurs et nécessite un sac suffisamment grand :

- On met au départ une boule dans un sac.
- À chaque tour, un jouer peut remplacer une boule du sac par un nombre fini (mais quelconque) de boules portant un numéro plus petit que celui de la boule retirée du sac.
- Un joueur perd lorsqu'il ne peut pas procéder à cette opération, et son adversaire gagne.

Montrer (par récurrence transfinie) qu'une partie termine toujours avec un perdant et un gagnant.