

## 1 Exercice (6 pts)

Montrer les triplets suivants (on demande dans cet exercice de préciser à chaque étape quelle règle du calcul de Hoare est appliquée).

### 1.1

```
 $\{x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3\}$   $x := x * 2$  ;  $y := x + 1$   $\{y > 6\}$ 
```

### 1.2

```
 $\{x, y, z \in \mathbb{N} \wedge x < z < y\}$   $x := x + 1$  ;  $y := y - 1$   $\{x \leq y\}$ 
```

### 1.3

```
 $\{x, y \in \mathbb{N}\}$   
if  $x < y$  then  $x := y + 1$  else  $x := x + 1$  endif  
 $\{y < x\}$ 
```

## 2 Exercice (4 pts)

### 2.1

Montrer que le triplet suivant est correct :

```
 $\{x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$   
while  $x < y$   
do  $x := x + 2$  done  
 $\{x = y \vee x = y + 1\}$ 
```

**Suggestion :** On pourra choisir comme invariant de boucle la proposition ci-dessous :

$$x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y + 1$$

## 3 Problème (10 pts)

Un programmeur dispose d'un clavier d'ordinateur sur lequel la touche “-” ne fonctionne pas. Afin de pouvoir quand même réaliser des soustractions de nombres entiers naturels, il écrit le programme suivant :

```
int d := 0;  
int x := a;  
while x < b  
do  
d := d + 1;  
x := x + 1  
done
```

On veut démontrer que si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels tels que  $a \leq b$ , alors la variable  $d$  contient la différence  $b - a$  à la fin de l'exécution du programme. Pour ce faire, vous devez répondre aux questions suivantes :

### 3.1 Question (2 points)

Donner un exemple simple d'exécution de ce programme. Comment se comporte le programme lorsque la pré-condition  $a \leq b$  n'est pas satisfaite?

### 3.2 Question (2 points)

Exprimer, à l'aide de triplets, la correction partielle et la correction totale de ce programme, pour la spécification considérée.

### 3.3 Question (4 points)

Donner un invariant de boucle pour ce programme. Vous devrez démontrer que votre proposition est bien un invariant permettant de prouver la correction du programme.

### 3.4 Question (2 points)

Démontrer que ce programme termine toujours, dans les conditions précisées plus haut ( $a \leq b$ ).

## 4 Annexe : Règles du Calcul de Hoare

### 4.1 Règles de base

#### 4.1.1 Instruction vide

$$\frac{}{\{P\} \text{ skip } \{P\}}$$

#### 4.1.2 Affectation $x := e$

$$\frac{}{\{P[e/x]\} x := e \{P\}}$$

#### 4.1.3 Composition $S; T$

$$\frac{\{P\} S \{R\} \quad \{R\} T \{Q\}}{\{P\} S ; T \{Q\}}$$

#### 4.1.4 Règle de la conséquence

$$\frac{P \Rightarrow P_1 \quad \{P_1\} S \{Q_1\} \quad Q_1 \Rightarrow Q}{\{P\} S \{Q\}}$$

#### 4.1.5 Règle de la conditionnelle

$$\frac{\{P \wedge b\} S \{Q\} \quad \{P \wedge \neg b\} T \{Q\}}{\{P\} \text{ if } b \text{ then } S \text{ else } T \text{ endif } \{Q\}}$$

#### 4.1.6 Règle pour la boucle **while**

$$\frac{\{P \wedge b\} S \{P\}}{\{P\} \text{ while } b \text{ do } S \text{ done } \{P \wedge \neg b\}}$$

## 4.2 Règles utiles

### 4.2.1 Conjonction des post-conditions

$$\frac{\{P\} S \{Q\} \quad \{P\} S \{R\}}{\{P\} S \{Q \wedge R\}}$$

### 4.2.2 Disjonction des pré-conditions

$$\frac{\{P\} S \{R\} \quad \{Q\} S \{R\}}{\{P \vee Q\} S \{R\}}$$

### 4.2.3 Invariant de boucle

$$\frac{P \Rightarrow Inv \quad Inv \wedge \neg b \Rightarrow Q \quad \{Inv \wedge b\} S \{Inv\}}{\{P\} \text{ while } b \text{ do } S \text{ done } \{Q\}}$$