Compléments de Mathématiques : Août 2008

Justifier toutes vos réponses !

1. On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } -n \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer la convergence de (f_n), et la fonction limite (si elle existe) dans les cas suivants : (i) au sens ponctuel sur $\mathbb{R}$, (ii) au sens uniforme sur $\mathbb{R}$, (iii) au sens uniforme sur K, un compact de $\mathbb{R}$.

2. On considère la suite de fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } -n^3 \leq x \leq n^3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer la convergence de (g_n), et la fonction limite (si elle existe) dans les cas suivants : (i) au sens uniforme sur $\mathbb{R}$, (ii) au sens de L^1 sur $\mathbb{R}$, (iii) au sens de L^2 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $P_0(x) = 1 \in L^2([0,1],\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}_0$, on note $P_a(x)$ le polynôme défini par $P_1(x) = ax$.
   (a) Prouver que $P_a(x) \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ quel que soit $a \in \mathbb{R}_0$.
   (b) Est-il possible de trouver $a \in \mathbb{R}_0$ tel que P_a soit perpendiculaire à P_0 (dans $L^2([0,1],\mathbb{R})$) ?
      – Si oui, déterminer un tel a et poser $\tilde{P} = P_a$.
      – Si non, trouver un polynôme de degré 1 qui soit perpendiculaire à P_0 (dans $L^2([0,1],\mathbb{R})$). Dans ce cas, on notera $\tilde{P}$ ce polynôme.
   (c) Soit M, le sous-espace vectoriel de $L^2([0,1],\mathbb{R})$ engendré par P_0 et $\tilde{P}$.
      i. Le polynôme $P_1(x) = x$ appartient-il M ?
      ii. Le polynôme $Q_2(x) = x^2$ appartient-il M ?
      iii. Déterminer si les deux valeurs suivantes sont nulles :

$$\inf_{y \in M} \|P_1 - y\|_{L^2} \qquad ; \qquad \inf_{y \in M} \|Q_2 - y\|_{L^2}.$$

4. Soient $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $h_n(x) = x^{n^2}$, et $\delta_n : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, définie par $\delta_n(\varphi) = \varphi(n)$. On note S_1 (resp. S_2 et S_3) les séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nx)\delta_n \qquad ; \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \delta_n \qquad ; \qquad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n \delta_n}{n^2}.$$

   (a) Etudier la convergence de la série S_1 au sens de $\mathcal{D}'$.
   (b) Etudier la convergence de la série S_2 au sens de $\mathcal{S}'$.
   (c) Etudier la convergence de la série S_3 au sens de $\mathcal{S}'$.