Compléments de Mathématiques : Août 2009.

Justifiez toutes vos réponses !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on note $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } \ -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si } \ x = -\pi,\, 0,\, \pi \\ 1 & \text{si } \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

   (a) Tracer le graphe de $f(x)$.
   (b) Calculer la série de Fourier de la fonction $f(x)$.
   (c) Déduire du point précédent la valeur de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. Calculer la transformée Fourier de la fonction $e^{x^2} * \chi_{\mathbb{Q}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\delta_n \in \mathcal{D}'$ par $\langle \delta_n | \varphi \rangle = \varphi(n)$, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}$.
   (a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \delta_n$; $\lim_{n\to+\infty} x^2\delta_n$; $\lim_{n\to+\infty} e^{x^2}\delta_n$.
   (b) Calculer (au sens des distributions) les dérivées suivantes : δ_n' ; $(x^2\delta_n)'$; $(e^{x^2}\delta_n)'$.
   (c) Calculer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \delta_n'$; $\lim_{n\to+\infty}(x^2\delta_n)'$; $\lim_{n\to+\infty}(e^{x^2}\delta_n)'$.
   (d) On considère maintenant des distributions tempérées, où $\delta_n \in \mathcal{S}'$ est défini par $\langle \delta_n | \varphi \rangle = \varphi(n)$, quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Dans ce nouveau cadre, calculer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \delta_n$; $\lim_{n\to+\infty} x^2\delta_n$.

4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la série suivante :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[n,n+1]}(x)$$

   (a) Tracer le graphe la fonction g.
   (b) Etudier la convergence de la série définissant g dans les cas suivants : (i) au sens ponctuel sur $\mathbb{R}$; (ii) au sens uniforme sur $\mathbb{R}$; (iii) au sens uniforme sur K sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$.
   (c) La fonction $\chi_{[n,n+1]}(x)$ est-elle dérivable en tant que fonction ? Si oui, calculer sa dérivée, si non donner son domaine de dérivabilité.
   (d) La fonction $\chi_{[n,n+1]}(x)$ est-elle dérivable en tant que distribution ? Si oui, calculer sa dérivée et en déduire la dérivée (distributionnelle) de g, si non donner son domaine de dérivabilité.

5. On considère $\cos(x)$ élément du $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$.
   (a) Prouver que $\sin(x)$ et e^{ix} appartiennent à $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$.
   (b) Soit M, le sous-espace vectoriel de $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ engendré par $\sin(x)$, $\cos(x)$ et e^{ix}.
   Donner une base orthonormée de M.
   (c) Trouver (s'il existe) l'élément y_0 de M qui satisfait l'égalité suivante :

$$\inf_{y\in M} \|\mathbf{i}\cos(x) + 2\sin(x) - y\|_{L^2} = \|\mathbf{i}\cos(x) + 2\sin(x) - y_0\|_{L^2}.$$

   En déduire la valeur de $\inf_{y\in M} \|\mathbf{i}\cos(x) + 2\sin(x) - y\|_{L^2}$.

6. On considère la suite de fonctions $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{si } \ -n^5 \leq x \leq n^5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer la convergence de (h_n), et la fonction limite (si elle existe) dans les cas suivants : (i) au sens uniforme sur $\mathbb{R}$, (ii) au sens de L^1 sur $\mathbb{R}$, (iii) au sens de L^2 sur $\mathbb{R}$.

7. Etudier la convergence des séries suivantes au sens de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{S}'$:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} x^7\chi_{[n,+\infty[} \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^5}\delta_n \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[-n,n]}.$$